

Исследование точности интервальных оценок в задачах моделирования процессов

М.Н. Мадияров, Н.М. Оскорбин, С.И. Суханов

Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова (Усть-Каменогорск, Казахстан)

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Ключевые слова: моделирование процессов, интервальные системы линейных алгебраических уравнений, модели прогноза, модели оценки параметров.

В данной работе проводится исследование точности интервальных оценок параметров процессов. Различные аспекты этой задачи и нестатистические методы ее решения рассматривались, например, в работах [1 – 7]. В данной работе исследование выполняется методами вычислительного эксперимента процесса прогноза прибыли корпорации, описанного в работе [7].

Прикладной интервальный анализ в нашем случае линейных моделей детерминированных процессов проводится с использованием множеств решений ИСЛАУ, коэффициенты и правая часть которой записана по результатам интервальных наблюдений. В матричной форме ИСЛАУ записывается интервальной ($N \times n$) матрицей коэффициентов и ($N \times 1$) интервальным вектором правой части в следующем виде:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (1)$$

Интервальное задание СЛАУ (2) понимается так, что элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{b} заданы интервалами: $A^H \leq \mathbf{A} \leq A^V$ и $B^H \leq \mathbf{b} \leq B^V$.

Применительно к задачам анализа данных в литературе [2, 3, 5, 6] рассматриваются три базовых множеств решений ИСЛАУ: объединенное множество решений, $\exists uni(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ предикатная формула которого записывается так:

$$\exists uni(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in R^n / (\exists A \in \mathbf{A})(\exists B \in \mathbf{b})(Ax = B)\}; \quad (2)$$

допусковое $\exists tol(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и управляемое $\exists ctl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ множества решений:

$$\exists tol(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x / (\forall A \in \mathbf{A})(Ax = B)\}; \quad \exists ctl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x / (\forall B \in \mathbf{b})(Ax = B)\}. \quad (3)$$

Запишем задачи исследования множеств решений ИСЛАУ, которые возникают при моделировании процессов. Обозначим $X_S \subset R^n$ – одно из трех введенных множеств решения ИСЛАУ в задаче анализа экспериментальных данных. Эти задачи запишем в обозначениях работы [7].

1. **Задача прогноза выходной переменной** моделируемого процесса на период времени $(N+1)$. Учитываем при прогнозе только оценки прибыли предприятий: $A_i^{H,N+1}; A_i^{V,N+1}, i = 1, \dots, n$. Тогда:

$$\hat{B}^{H,N+1} = \min_{x \in X_S} (A_1^{H,N+1} x_1 + \dots + A_n^{H,N+1} x_n); \quad \hat{B}^{V,N+1} = \max_{x \in X_S} (A_1^{V,N+1} x_1^p + \dots + A_n^{V,N+1} x_n^p). \quad (4)$$

Заметим, что прогноз по измеренным значениям $A_i^{N+1}, i = 1, \dots, n$ не является корректным, поскольку оцениваемый интервал может не содержать истинного значения B'^{N+1} прогнозируемой прибыли.

2. **Задача оценки коэффициентов** линейной зависимости моделируемого процесса (предполагается, что баланс прибыли корпорации неизвестен [7]).

В качестве интервальной оценки этих коэффициентов можно решить $2n$ задач линейного программирования. Например, x_1 принадлежит интервалу $[x_1^H, x_1^V]$:

$$x_1^H = \min_{x \in X_S} x_1; \quad x_1^V = \max_{x \in X_S} x_1. \quad (5)$$

Имитация условий анализа прибыли корпорации проводилась в среде Excel при следующих исходных данных: $n=3; N=12$; истинные значения входных переменных $A'_i, i = 1, \dots, 3$ в каждом из $(N+1)$ временных периодов принимались как равномерно распределенные псевдослучайные числа на интервалах $[0, 100]$; соответствующие значения прибыли корпорации B' определялись на основе балансного уравнения; ошибки измерения (2) и (3) во всех испытаниях принимались равномерно распределенными на одинаковых симметричных относительно нуля интервалах: $[-5, 5] \times [-5, 5] \times [-5, 5] \times [-\varepsilon_B, \varepsilon_B]$. Здесь верхние оценки ошибки выходной переменной задавались переменными для обеспечения условия, при котором исследуемое множество решений ИСЛАУ не пусто и сравнимо с двумя другими. Пример точных значений прибылей корпорации и их оценок представлен в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Данные без ошибок измерения

	A1	A2	A3	B
1	23,93	19,84	97,14	140,91
2	13,84	91,08	65,11	170,03
3	35,27	18,48	70,67	124,42
4	68,21	39,87	84,02	192,09
5	76,78	22,20	13,35	112,33
6	24,28	88,86	64,10	177,23
7	11,60	6,28	26,29	99,18
8	12,92	49,01	83,69	145,62
9	91,99	26,19	21,89	140,07
10	29,43	61,70	16,77	107,90
11	58,73	80,64	95,76	235,12
12	83,98	89,17	5,45	178,60
13	17,01	73,08	51,91	142,00

Таблица 2. Данные с ошибок измерения, $\varepsilon_B = 10$

	A1	A2	A3	B
1	26,99	19,99	98,11	149,74
2	17,80	93,8	68,41	160,7
3	38,41	14,64	67,47	127,32
4	67,48	38,84	88,28	191,76
5	75,53	23,05	11,26	113,07
6	19,37	83,87	64,64	182,70
7	16,57	57,07	30,77	94,54
8	17,00	47,84	79,19	150,69
9	89,93	27,74	22,38	147,71
10	24,47	65,00	18,49	107,10
11	57,86	84,12	95,31	240,01
12	79,54	89,72	4,98	169,15
13	15,94	73,27	47,94	135,37

Объединенное множество решений ИСЛАУ содержит точку $x^d = (1, 1, 1)$ по определению этого множества для правильных измерений, что следует и по результатам численного решения задачи (10).

Для данных таблицы 2 решение задач (8) является следующим:

$$\hat{B}^{H,N+1} = 109,7; \quad \hat{B}^{V,N+1} = 160,3; \quad B^{C,N+1} = 0.5(\hat{B}^{H,N+1} + \hat{B}^{V,N+1}) = 135; \quad \Delta = 17.8\%. \quad (11)$$

Для сравнения приведем значения и погрешности прогноза по оценкам аналитиков. Эти данные в порядке выражения (11) имеют следующие значения: 125,4; 145,4; 135,4; 7,0%. Приведем соответствующие значения, полученные с использование балансового уравнения по нижним и верхним значениям прибылей предприятий: 122,2; 152,2; 137,2; 10,6%. Приведенные числовые данные не противоречат визуальному анализу и свойствам объединенного множества решений. Следует отметить, что использование объединенного множества решений ИСЛАУ в качестве инструмента прогноза прибыли корпорации в рассмотренном случае не позволяет улучшить оценки, полученные визуальным анализом данных.

Допусковое множество решений ИСЛАУ для данных таблицы 2 и заданных предельных значений погрешностей измерения является пустым. Этот результат вполне согласуется с исследованиями С.П. Шарого [3], т.е. в данном случае произведение Ax получает «большой размах» в сравнении с размахом вектора b . В

нашем случае для данных таблицы 1 и принятых оценок погрешностей измерения, в которых $\varepsilon_B = 20$ с дополнительным коэффициентом расширения k_B размаха вектора \mathbf{b} равным двум ($k_B = 2$) получена ИСЛАУ с подходящими свойствами. Ее исследование для 15 вариантов выборок независимых ошибок измерения показало, что в 5 вариантах допусковое множество не пусто и содержит точку $x^d = (1, 1, 1)$; в 8 вариантах оно не пусто, но необходимое для корректности модели условие $x^d \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не выполнено; в 2 вариантах множество $X_{вн}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ оказалось пустым.

Для одного из первой группы вариантов приведем решение задач (8):

$$\hat{B}^{H,N+1} = 121,1; \quad \hat{B}^{V,N+1} = 162,5; \quad B^{C,N+1} = 0.5(\hat{B}^{H,N+1} + \hat{B}^{V,N+1}) = 141,8; \quad \Delta = 14.6\%. \quad (12)$$

Рассмотрим формально по аналогии с вышеизложенными свойствами управляемого множества решений ИСЛАУ для данных таблицы 2 и заданных предельных значений погрешностей. Следует отметить, что примеры использования множества $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ в задачах моделирования процессов представлены в работе [7].

Как и следовало ожидать, это множество для рассматриваемой таблицы измерений является пустым. Поступая зеркально схеме исследования множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ зададим $\varepsilon_B = 5$ с дополнительным коэффициентом сжатия размаха вектора \mathbf{b} равным 0,6 ($k_B = 0,6$) и получим ИСЛАУ с подходящими свойствами. Ее исследование для 15 вариантов выборок независимых ошибок измерения показало, что в 11 вариантах управляемое множество не пусто и содержит точку $x^d = (1, 1, 1)$; в 4 вариантах оно не пусто, но необходимое для корректности модели условие $x^d \in X_{UR}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не выполнено.

Для одного из первой группы вариантов приведем решение задач (8):

$$\hat{B}^{H,N+1} = 119,1; \quad \hat{B}^{V,N+1} = 160,9; \quad B^{C,N+1} = 0.5(\hat{B}^{H,N+1} + \hat{B}^{V,N+1}) = 140; \quad \Delta = 14.7\%. \quad (13)$$

Как видим, эти данные с учетом точности их вычисления совпадают с (12), как и оценки погрешностей с использованием визуальных методов прогнозирования.

Полученные результаты позволяют уточнить методические подходы применения теоретических результатов ИСЛАУ в задачах анализа данных и математического моделирования реальных процессов.

Библиографический список

1. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал, т.3, №5, 1962. – С. 701-709.
2. Шарый С.П. Решение интервальной линейной задачи о допусках // Автоматика и телемеханика, № 10, 2004. – С. 147-162.
3. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: Изд-во «XYZ». 2017. – 618 с.
4. Оскорбин Н.М., Жилин С.И., Максимов А.В. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределенности // Известия АГУ. 1998. № 1. – С. 35-38.
5. Жолен Л. и др., Прикладной интервальный анализ. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 468 с.
6. Шарый С.П. Сильная согласованность в задаче восстановления зависимостей при интервальной неопределенности данных // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22, № 2. – С. 150-172.
7. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования. – 2-е изд. испр. и доп. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – 264 с.
8. Мадияров М.Н., Оскорбин Н.М., Суханов С.И. Примеры интервального анализа данных в задачах моделирования процессов // Известия АГУ. 2018. № 1.

Сведения об авторах:

Мадияров Мураткан Набенович, к.т.н., заведующий кафедрой математики Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова, e-mail: maidiyarov_mur@mail.ru тел.: +7-921-809-4708

Оскорбин Николай Михайлович, д.т.н., профессор Алтайского государственного университета, e-mail: osk46@mail.ru тел.: 8-903-947-2787

Суханов Сергей Иванович, к.т.н., доцент Алтайского государственного университета, e-mail: sukhanov-s@yandex.ru тел.: 8-905-987-0083