

УДК 579.6; 004.9

Однокомпонентная модель производства биогаза из растительного сырья

Баюк А.А., Петрова А.Г., Хворова Л.А.

Алтайский государственный университет

AnastasiaBayuk@gmail.com, annapetrova07@mail.ru, KhvorovaLA@gmail.com**Аннотация**

Статья посвящена исследованию математической модели технологического процесса производства биогаза из растительного сырья. Цель работы – исследование устойчивости системы дифференциальных уравнений. Рассмотрена модель с непрерывным циклом технологического процесса анаэробного сбраживания неоднородной однокомпонентной растительной биомассы. Получен ряд результатов, позволяющих поставить задачу оптимизации – максимизация производства биогаза.

Введение

Поиск альтернативных возобновляемых источников энергии – одно из приоритетных направлений развития современной науки. Одним из таких источников является биогаз – смесь газов с преобладающим содержанием метана. Его получают путём анаэробного сбраживания органического сырья. Важное место в этой сфере занимают технологии так называемой «зеленой энергетики», когда для производства топлива или прямого преобразования в тепловую энергию используется накопленная в биомассе высших растений в результате фотосинтеза энергия. В качестве исходного субстрата биогазового реактора могут быть использованы послеуборочные растительные остатки традиционных пищевых культур, биомасса промежуточных культур, выращиваемых на полях сидерального пара, а также специально выращиваемые высокоэнергоемкие энергетические культуры.

Цель работы – аналитическое исследование устойчивости стационарных решений нелинейной системы дифференциальных уравнений. Задача решается путем линеаризации уравнений на стационарных решениях. Проведено качественное исследование поведения фазовых кривых с помощью собственных чисел матрицы линеаризованной системы.

Проведенное исследование позволит поставить и решить задачу определения оптимальных параметров, обеспечивающих максимальный объем производства биогаза.

Материалы и методы

Анаэробная ферментация органического сырья с целью производства биогаза представляет собой достаточно сложный и многоступенчатый процесс, состоящий как из последовательных химических реакций (когда выход предшествующей реакции служит субстратом для последующей), так и из параллельных путей трансформации различных химических соединений с образованием одного и того же конечного продукта [1–3]. В процессе получения биогаза выделяют четыре стадии: первая стадия – гидролиз высокомолекулярных органических соединений (углеводов, белков и жиров) – разложение до составляющих их полимеров (соответственно сахаров, аминокислот и жирных кислот); вторая стадия – ацетогенез, в процессе которого под действием анаэробных бактерий происходит образование сложных спиртов и карбоновых кислот; на третьей стадии ацетогенеза сложные спирты и карбоновые кислоты разлагаются до уксусной и муравьиной кислот, а также метанола с выделением водорода [4]; в ходе четвертой стадии метаногенеза происходит образование биогаза.

В основе математической модели лежит нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая только три основополагающих процесса: гидролиз (первичное разложение) исходного субстрата (реакция, в первом приближении, протекающая без привлечения внешних катализаторов или ферментов); метаногенез – образование биогаза из продуктов первичного разложения органического сырья под действием специфических анаэробных микроорганизмов (таким образом в описание обобщенного процесса

метаногенеза неявно включаются стадии ацито- и ацетогенеза); динамика роста и разложения микробной биомассы, необходимой для протекания процессов анаэробного брожения.

Модель представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dW}{dt} = -k \cdot W \cdot f_H(S) + K_{flow} \cdot (W_0 - W), \quad (1)$$

$$\frac{dS}{dt} = \gamma \cdot k \cdot W \cdot f_H(S) - \rho_M \cdot f_M(S) \cdot \frac{S \cdot B}{K_S + S} - K_{flow} \cdot S, \quad (2)$$

$$\frac{dB}{dt} = \theta \cdot \rho_M \cdot f_M(S) \cdot \frac{S \cdot B}{K_S + S} - K_D \cdot B - K_{flow} \cdot B, \quad (3)$$

$$\frac{dP}{dt} = Y \cdot (1 - \theta) \cdot \rho_M \cdot f_M(S) \cdot \frac{S \cdot B}{K_S + S}. \quad (4)$$

где W и S – концентрация исходного субстрата и продуктов гидролиза соответственно (г/л); P – суммарный выход биогаза (г/л); k – константа скорости гидролиза; γ – коэффициент конверсии субстрата в жирные кислоты (стехиометрический коэффициент); ρ_m – максимальная удельная скорость метаногенеза в терминах утилизации биомассы летучих жирных кислот; K_S – константа полунасыщения в уравнении Моно для интенсивности метаногенеза; Y – доля субстрата, идущая на рост микробной биомассы; $(1 - \theta)$ – доля субстрата, идущая на образование биогаза; K_D – коэффициент распада микробной биомассы; θ – переводной коэффициент потока утилизации жирных кислот в единицы выхода конечного продукта (биогаза); K_{flow} – интенсивность притока свежего субстрата неизменного структурного состава, равная интенсивности оттока общего интермедиата из рабочей области реактора (1/сут). Таким образом, эту величину можно интерпретировать как долю содержимого всего объема реактора, замещаемую в единицу времени исходным субстратом.

Функции $f_H(S)$ и $f_M(S)$ описывают ингибирование реакций гидролиза и микробной ферментации жирными кислотами:

$$f_*(S) = \left(1 + \left(\frac{S}{A_*} \right)^{N_*} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Для замыкания системы укажем начальные условия:

$$W(0) = W_0, S(0) = 0; B(0) = B_0, P(0) = 0. \quad (6)$$

$A_* = A_H$ или $A_* = A_M$ – масштабные коэффициенты в функции ингибирования гидролиза продуктом и в функции ингибирования ферментации субстратом соответственно. Будем полагать что $f_H(S) = f_M(S) = f(S)$.

Исследование устойчивости системы дифференциальных уравнений

Поскольку P представляет собой конечный продукт и не входит в первые три уравнения, то исследуем на стационарность и устойчивость по первому приближению решение системы (1)–(3).

Для дальнейшего исследования устойчивости стационарного решения необходимо линеаризовать систему (1)–(3).

При $\gamma = 1$, $K_{flow} = 0$, $K_D = 0$, $Y = 1$ для системы (1)–(4) выполнен закон сохранения: $(W + S + B + P)_t = 0$. Это означает, что $W + S + B + P = W_0 + S_0 + B_0 + P_0$. Воспользовавшись начальными условиями (6), получили: $W + S + B + P = W_0 + B_0$. В этом случае неподвижными точками системы являются:

$$W = 0, S = 0, B + P = W_0 + B_0 \quad (7)$$

или

$$W = 0, B = 0, S + P = W_0 + B_0. \quad (8)$$

В случае (7) органическое вещество полностью переработано, и конечный продукт содержит только метаногенную биомассу и газ. Во втором случае (8) органическое вещество полностью переработано, и конечный продукт содержит только жирные кислоты и газ.

При исследовании точек первого типа (7) и второго типа (8) было выявлено, что при заданных условиях об устойчивости системы (1)–(4) ничего сказать нельзя.

Вернемся к системе (1)–(3) и найдем её неподвижную точку:

$$W^* > 0, S^* > 0, B = 0, \quad (9)$$

где W^* , S^* находятся из системы уравнений (1), (2). Данная система, в силу свойств функции $f(S)$, имеет единственное положительное решение. По критерию Гурвица неподвижная точка (9) устойчива при условии:

$$Y\rho_m f(S^*) \frac{S^*}{K_s + S^*} < K_D + K_{flow}.$$

Однако, нас интересуют неподвижные точки, для которых $B \neq 0$. Существование таких точек возможно, если уравнение, полученное из (3):

$$f(S) \frac{S}{K_s + S} = \frac{(K_D + K_{flow})}{Y\rho_m}, \quad (10)$$

имеет положительное решение S^* и при этом

$$B^* = \gamma k \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + kf(S^*)} f(S^*) - K_{flow} S^* > 0$$

или

$$f(S^*) > \frac{K_{flow} S^*}{k(\gamma W_0 - S^*)}, \quad \text{где } S^* < \gamma W_0. \quad (11)$$

Очевидно, что при достаточно малых значениях $\frac{(K_D + K_{flow})}{Y\rho_m}$ уравнение (10) имеет два положительных корня. Выбором W_0 можно добиться выполнения неравенства (11) для одного или даже двух корней уравнения (10).

При исследовании нового положения равновесия на устойчивость был получен кубический полином, все коэффициенты которого положительны в случае

$$f(S^*) \frac{S^* B^*}{K_s + S^*} + f(S^*) \frac{B^* K_s}{(K_s + S^*)^2} > 0.$$

Следовательно, положение равновесия системы (1)–(3), для которого

$$W^* = \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + kf(S^*)}, \quad B^* = \gamma k \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + kf(S^*)} f(S^*) - K_{flow} S^*$$

и S^* – меньший корень уравнения (10), по критерию Гурвица является устойчивым. Положение равновесия, в котором S^* – больший корень уравнения (10), по критерию Гурвица является неустойчивым.

Также было проведено численное исследование устойчивости точки покоя данной системы при изменении параметра K_{flow} на интервале $[0.05, 0.1]$. Выбор данного интервала обусловлен физическими характеристиками исследуемой системы.

Рассмотрим случай: $B=0$. Тип точки покоя по первому приближению является устойчивым узлом. Обе действительные части собственных чисел Якобиана системы являются отрицательными. Однако, при увеличении W_0 больше критического значения, система теряет устойчивость. Точка покоя становится неустойчивым седлом.

На рисунках 1–3 приведены фазовые портреты исследуемой системы при $K_{flow}=0.09$. Точка покоя системы является устойчивым узлом при изменениях параметра W_0 в интервале $[20, 60]$.

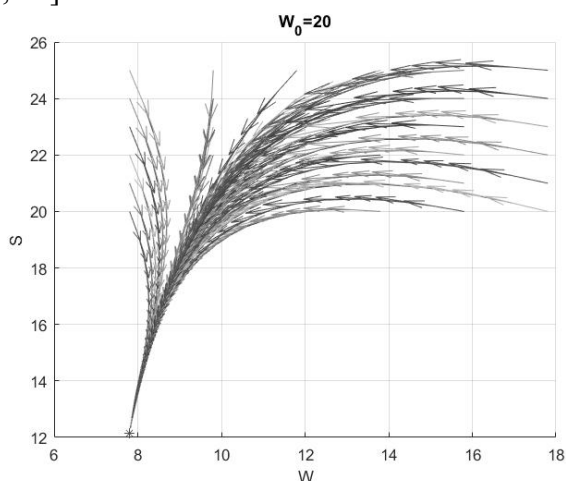


Рисунок 1 – Фазовый портрет при $W_0 = 20$

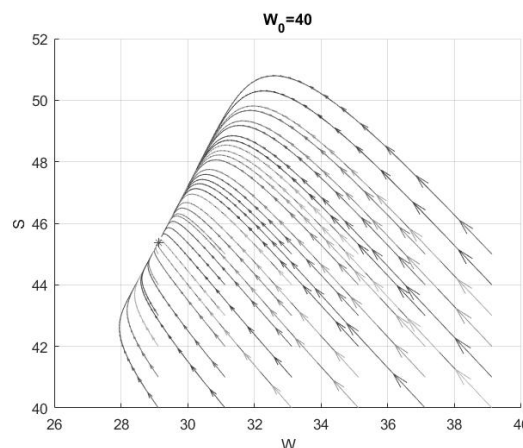


Рисунок 2 – Фазовый портрет при $W_0 = 40$

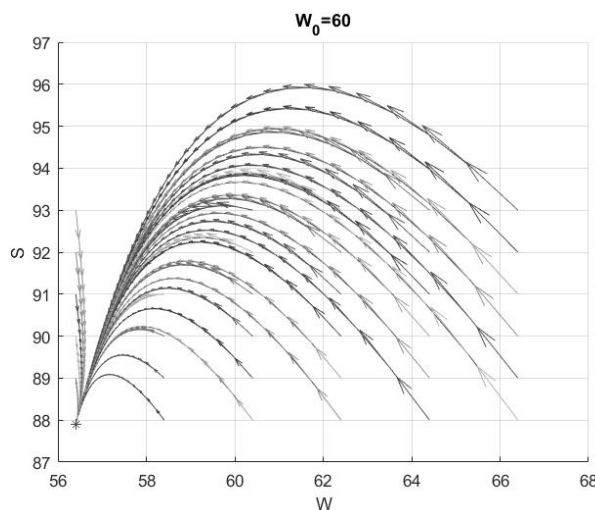


Рисунок 3 – Фазовый портрет при $W_0 = 60$

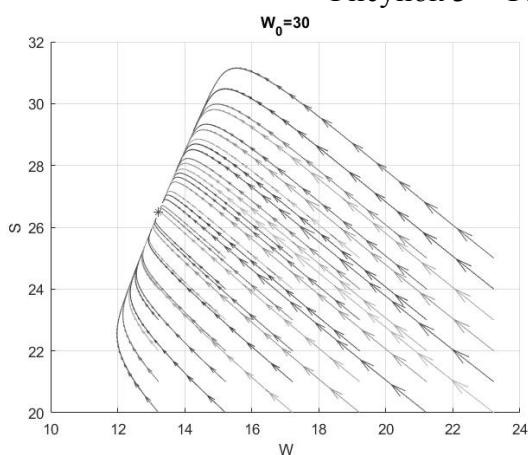


Рисунок 4 – Фазовый портрет при $W_0 = 30$, $K_{flow} = 0.07$

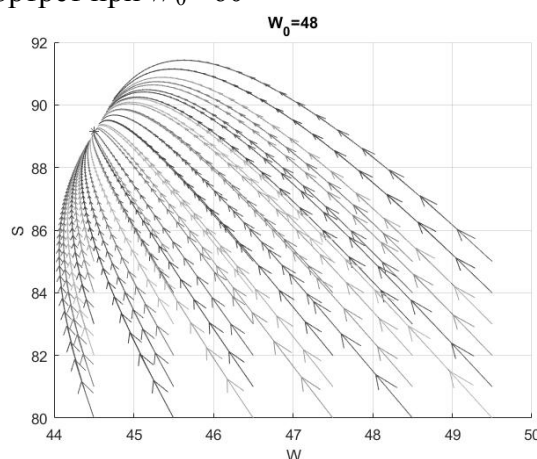


Рисунок 5 – Фазовый портрет при $W_0 = 48$, $K_{flow} = 0.07$

На рисунках 4–5 приведены фазовые портреты исследуемой системы при $K_{flow}=0.07$. Численное исследование показывает, что уменьшение K_{flow} влечет уменьшение интервала устойчивости для W_0 . Устойчивость достигается на интервале $[20, 48]$.

Таким образом, численное исследование позволило выявить зависимость между параметрами W_0 и K_{flow} . Уменьшение интенсивности притока свежего субстрата неизменного структурного состава влияет на устойчивость развития системы и накладывает ограничения на начальное количество органического вещества W_0 .

Рассмотрим второй случай: $B \neq 0$. Для системы (1)–(3) численно исследована устойчивость по первому приближению при различных значениях параметра W_0 . Устойчивость точки покоя системы слабо зависит от количества начального органического вещества W_0 . Таким образом, данная система устойчива к значительным объемам начального органического вещества. На рисунках 6, 7 приведены фазовые портреты для переменных W , S при разных значения W_0 .

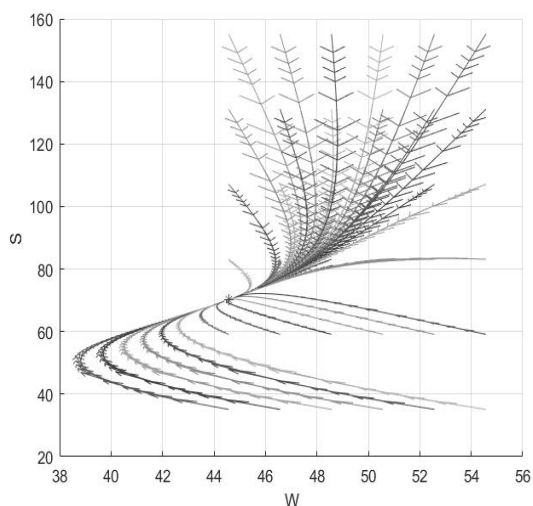


Рисунок 6 – Фазовый портрет при $W_0=50$,
 $K_{flow}=0.089$

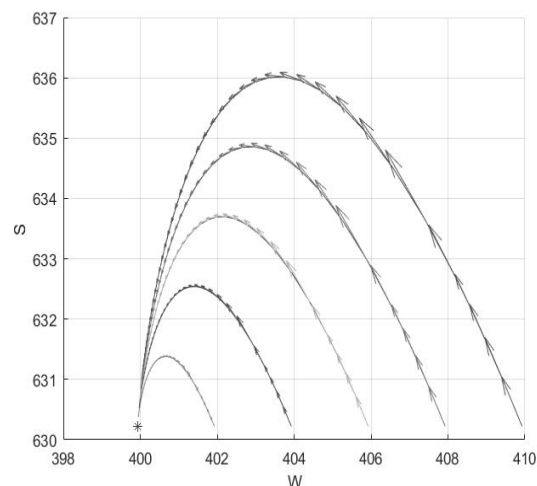


Рисунок 7 – Фазовый портрет при $W_0=400$,
 $K_{flow}=0.089$

Зависимость устойчивости решения системы при изменении K_{flow} не позволила выявить какой-либо явной закономерности и требует дополнительных исследований.

В заключение сформулируем оптимизационную задачу – максимизация скорости выхода биогаза:

$$(1-Y)f(S^*) \frac{S^* B^*}{K_S + S^*} \rightarrow \max$$

или

$$\left(\gamma k \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + k f(S^*)} f(S^*) - K_{flow} S^* \right) (1-Y) \frac{K_D + K_{flow}}{Y} \rightarrow \max.$$

В качестве управляющих параметров выступают начальные значения W_0 и K_{flow} . Данная задача будет решаться в среде имитационного моделирования Anylogic.

Библиографический список

1. Вавилин В.А. Как эффективно получать биогаз? // Природа. – 2008. – №11. – С. 14–19.
2. Вавилин В.А. Исследование анаэробной деградации органических отходов: опыт математического моделирования // Микробиология. – 2010. – Т.79, №3. – С. 352–359.
3. Топаж А.Г., Вигонт В.А., Хворова Л.А. Имитационная модель процесса производства биогаза из многокомпонентного растительного сырья. Анализ и параметрическая оптимизация // Химия растительного сырья. – 2018. – №1. – С. 171-184.
4. Топаж А.Г., Хворова Л.А., Жариков А.В., Баяк А.А. Исследование математической модели производства биогаза из растительного сырья // Известия АлтГУ. – 2018. – №1(99). – С. 127-131.