S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1981–2002 (2019) УДК 512.552.4
DOI 10.33048/semi.2019.16.142 MSC 16R10

О СТАНДАРТНОМ ТОЖДЕСТВЕ В КОНЕЧНОПОРОЖДЕННОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЕ R НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛЕМ С УСЛОВИЕМ $\dim R^N/R^{N+1} = 2$

Е.П. ПЕТРОВ

Abstract. In this paper it is proved that s-generated nilpotent algebra R over arbitrary field with condition $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ for some natural number $N \geq 3$ satisfies the standard identity of degree $N+2$ if $s \geq N$, or the standard identity of smaller degree than N if $s < N$. The results of this article on a characteristic field other than 2 were obtained in a previous work by the author, published in SEMR.

Keywords: defining relations, identities, nilpotent algebra.

1. Введение

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] была поставлена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n — фиксированное число).

В 1980 году С.А.Пихтильковым [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n \leq 18$.

Известная теорема Веддерберна сводит вопрос о строении произвольной ассоциативной конечномерной алгебры над полем к соответствующему вопросу для полной алгебры матриц и нильпотентной алгебры, которые к настоящему времени достаточно хорошо изучены. Тем не менее, как для матричных, так и для нильпотентных алгебр остается нерешенным довольно широкий круг задач. В частности, описание определяющих соотношений и тождеств, выполняющихся в этих алгебрах.

Petrov, E.P., On the standard identity in a finitely generated nilpotent algebra R over an arbitrary field with condition $\dim R^N/R^{N+1} = 2$.

Поступила 9 октября 2019 г., опубликована 26 декабря 2019 г.

Что касается нильпотентных алгебр, то с целью решения вышеуказанной задачи (№ 1.23) были проведены следующие исследования.

В 1986 году Ю.Н.Мальцевым [3] изучалось многообразие $\mathfrak{M}_n$ ассоциативных алгебр над произвольным полем, порожденное всеми n-мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для $n = \overline{1,6}$, а также доказано, что каждая n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет тождествам:

$x_1 x_2 \dots x_{n-2} = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n-2)},\ \sigma \in S_{n-2},\ n \geq 6;\quad [x_1, x_2, \dots, x_k] = 0,$ где $k = [\frac{n+1}{2}] + 1$. Кроме того, в работе [3] был поставлен вопрос:

(*) *Какова степень минимального тождества в многообразии* $\mathfrak{M}_n$*?*

Заметим, что описание многообразия $\mathfrak{M}_n$ на языке тождеств позволит ответить на вопрос: когда приведенно-свободная алгебра некоторого многообразия аппроксимируется k-мерными нильпотентными алгебрами ($k \leq n$)? Исходя из этого, представляется естественным изучение тождеств сначала нильпотентных n-мерных алгебр, а затем уже произвольных n-мерных алгебр.

В 1989 г. И.Л.Гусевой [4] было доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству

$$S_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0, \text{ где } k = [\tfrac{n}{3}] + 2.$$

В 1991 г. автором [6] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, \dots, x_k) = 0$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, в качестве подтверждения этой гипотезы приводится пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра R с условием $dim R^2/R^3 \leq 2$ удовлетворяет данной гипотезе.

Из этого результата следует, что стандартное тождество $S_k(x_1, \dots, x_k) = 0$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, является минимальным тождеством в $\mathfrak{M}_n$ для $n \leq 12$ и $n = 15$ (см. [6]). Таким образом, для малых размерностей был получен положительный ответ на вопрос (*).

Необходимо заметить, что стандартное тождество благодаря своим уникальным свойствам является очень удобным инструментом в исследовании PI-алгебр. Оно довольно часто используется в работах многих авторов.

К примеру, благодаря замечательной теореме С. Амицура, Я. Левицкого (алгебра $M_n(K)$, где K — коммутативная алгебра над полем F, удовлетворяет тождеству $S_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = 0$) многим авторам, изучающим PI-алгебры, удалось продвинуться в своих исследованиях, поскольку, если алгебра A является подалгеброй $M_n(K)$, то идеал тождеств $T(A)$ содержит идеал тождеств $T(M_n(K))$ для некоторого целого числа $n \geq 1$, в частности, $T(A) \ni S_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$. Эта идея, например, была основной для построения контрпримера к проблеме Капланского о вложении PI-алгебр в $M_n(K)$.

Данная работа продолжает исследования, проводимые ранее в работах автора [6]-[7].

Так, в работе [7] автором изучались строение и определяющие соотношения ассоциативной нильпотентной конечномерной алгебры R над произвольным полем с условием $\dim R^2/R^3 = 2$, и было показано, что всякая такая алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0.$$

Причем эта оценка оказалась точной.

Далее в работах [8], [9] автором изучались строение, определяющие соотношения произвольной ассоциативной s-порожденной нильпотентной алгебры R над полем с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ (для некоторого $N > 2$), и показано, что всякая такая алгебра над полем характеристики, не равной 2, удовлетворяет стандартному тождеству $S_{N+2}(x_1, x_2, \ldots, x_{N+2}) = 0$, а при $s < N$ и достаточно больших значениях числа N алгебра удовлетворяет стандартному тождеству значительно меньшей степени, чем N. При этом, эта оценка является точной для бесконечного множества значений N определенного вида.

Использованная автором в работах [8], [9] техника, в основном, была рассчитана на получение некоторой классификации s-порожденных нильпотентных алгебр с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, построении естественных (и по своему строению простых) определяющих соотношений и, как следствие, получение основного результата о стандартном тождестве, выполняющемся в этих алгебрах.

Надо сказать, что основным источником в применении данной техники явились идеи, изложенные в работе Р. Крузе и Д. Прайса [5].

К сожалению, такая техника, использующая подробное описание определяющих соотношений в алгебре R, не позволила получить основной результат для случая, когда поле имеет характеристику два, поскольку в этом случае естественные определяющие соотношения на порождающих устроены довольно сложно и получить основной результат о стандартном тождестве, выполняющемся в алгебре R, оказалось весьма затруднительно.

В данной работе мы используем несколько иную технику (хотя по многим параметрам и похожую на предыдущую). Отличие новой техники от старой заключается в нахождении в алгебре R специального вида определяющих соотношений, выполняющихся в алгебре R, довольно искусственным образом построенных, которые устроены таким образом, что стандартный полином от элементов алгебры R можно представить в виде суммы таких соотношений.

Использование этой идеи и позволило доказать основной результат о стандартном тождестве, выполняющемся в s-порожденной нильпотентной алгебре R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ для некоторого ($N > 2$) уже над произвольным полем.

2. Предварительные замечания и определения

В данной работе мы будем предполагать, что R — нильпотентная конечномерная алгебра R над полем F с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ для некоторого $N \geq 3$.

Причем поле F будем считать произвольным, если не оговорено иное.

Напомним некоторые определения и обозначения из работ [6] - [9].

Будем называть типом алгебры R следующую строчку натуральных чисел: $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{m-1})$, где $s_i = \dim R^i/R^{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$, m – индекс нильпотентности алгебры R.

Типу алгебры R соответствует следующая базис-таблица:

$v_1^{(1)}$	$v_1^{(2)}$	$v_1^{(3)}$	$\dots$	$v_1^{(m-1)}$
$v_2^{(1)}$	$v_2^{(2)}$	$v_2^{(3)}$	$\dots$	$v_2^{(m-1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_{s_1}^{(1)}$	$v_{s_2}^{(2)}$	$v_{s_3}^{(3)}$	$\dots$	$v_{s_{m-1}}^{(m-1)}$

,

под которой мы понимаем описание базиса алгебры R, где элементы i-го столбца — базис R^i по модулю R^{i+1}, $i = 1, \dots, m-1$.

В работе будем рассматривать хорошо известные тождества:

$p_k^\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 x_2 \cdots x_k - x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0$ (перестановочное тождество),

$S_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum\limits_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0$, (стандартное тождество), где подстановка σ пробегает симметрическую группу S_k.

Если S — подмножество алгебры R, то через $\langle S \rangle$ будем обозначать подалгебру, порожденную S. Если $x \in R, x \notin R^i$ то, рассматривая его образ в R/R^i, условимся вместо $x + R^i$ писать x там, где это не вызовет недоразумений.

Запись $\lfloor x \rfloor$ обозначает округление числа x в меньшую сторону (целая часть числа, пол), $\lceil x \rceil$ обозначает округление числа x в большую сторону (потолок).

Напомним также некоторые факты из работ [6] - [9].

Прежде всего в работе [8] было получено общее представление о строении конечномерной нильпотентной алгебры R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$.

Предложение 1. [8]. *Пусть R — конечномерная нильпотентная алгебра над произвольным полем F с условием $\dim R^N/R^{N+1} = \dim R^{N+1}/R^{N+2} = 2$ для некоторого $N \geq 2$. Тогда алгебра R имеет тип*

$$\Big(s_1 + 2,\ s_2 + 2,\ \dots\ ,\ s_{N-1} + 2,\ \underbrace{2,\ \dots\ ,\ 2}_{k-N+2},\ \underbrace{1,\ \dots\ ,\ 1}_{t-1}\Big)$$

и следующую базис-таблицу:

a	a^2	$\dots$	a^{N-1}	a^N	$\dots$	a^k	a^{k+1}	a^{k+2}	$\dots$	a^{k+t}
b	ab	$\dots$	$a^{N-2}b$	$a^{N-1}b$	$\dots$	$a^{k-1}b$	$a^k b$			
c_1	$v_1^{(2)}$	$\dots$	$v_1^{(N-1)}$							
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
c_{s_1}	$v_{s_2}^{(2)}$	$\dots$	$v_{s_{N-1}}^{(N-1)}$							

,

где $s_i + 2 = \dim R^i/R^{i+1}$, $i = \overline{1, N-1}$, $k \geq N$, $t \geq 0$, $k + t + 1$ — *индекс нильпотентности алгебры R.*

Имеет место следующее предложение из работы [6]:

Предложение 1. [6]. *Пусть R — конечномерная нильпотентная алгебра индекса m над произвольным полем и для некоторого $i \in \{1, \dots, m-1\}$ удовлетворяет условию $\dim R^i/R^{i+1} = 1$. Тогда алгебра R удовлетворяет тождествам $p_{i+1}^\sigma(x_1, \dots, x_{i+1}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{i+1}$.*

В нашем случае алгебра R удовлетворяет перестановочным тождествам $p_{k+3}^\sigma(x_1, \dots, x_{k+3}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{k+3}$.

Очевидно, что одними из основополагающих соотношений от порождающих a, b в алгебре R являются следующие равенства:

$$a^{N-2}ba = Aa^N + Ba^{N-1}b, \tag{1}$$

$$a^{N-2}b^2 = Ca^N + Da^{N-1}b, \tag{2}$$

$$a^{k+1}b = Ea^{k+2}, \tag{3}$$

где $A = \sum\limits_{p=1}^{k+t-N+1} \alpha_p a^{p-1}$, $B = \sum\limits_{p=1}^{k-N+2} \beta_p a^{p-1}$, $C = \sum\limits_{p=1}^{k+t-N+1} \gamma_p a^{p-1}$,

$D = \sum\limits_{p=1}^{k-N+2} \delta_p a^{p-1}$, $E = \sum\limits_{p=1}^{t-1} \nu_p a^{p-1}$, $\alpha_p,\ \beta_p,\ \gamma_p,\ \delta_p,\ \nu_p \in F$.

Заметим, что элементы A, B, C, D, E принадлежат подалгебре $\langle a\rangle^1$ с присоединенной единицей, порожденной элементом a, и, поскольку a — нильпотентный элемент, обратимость какого-либо из элементов A, B, C, D, E равносильна наличию у него ненулевого "свободного члена".

При этом, если $A \neq 0$, то $A = \widetilde{A}a^{s-1}$, где $\widetilde{A}$ — обратим, a^{s-1} — самая маленькая степень с ненулевым коэффициентом, и, если $E \neq 0$, то $E = \widetilde{E}a^{r-1}$, где $\widetilde{E}$ — обратим, a^{r-1} — самая маленькая степень с ненулевым коэффициентом, $s \in \{1, \ldots, k+t-N+1\}$, $r \in \{1, \ldots, t-1\}$.

3. Определяющие соотношения в алгебре R

В этой части работы в каждом из утверждений мы будем предполагать, что R — нильпотентная конечномерная алгебра R над полем F с условием $\dim R^N/R^{N+1} = \dim R^{N+1}/R^{N+2} = 2$ для некоторого $N \geq 3$.

Заметим, что при подходящей замене порождающего b можно значительно упростить соотношения (1), (3), выполняющиеся в алгебре R, следя за значениями коэффициентов β_i элемента B из соотношения (1). Этому была посвящена в работе [8] лемма 5. Здесь мы представим аналогичное утверждение, изменив немного формулировку леммы 5 [8].

Лемма 1. *Можно подобрать порождающий элемент b' так, что в алгебре R соотношения (1), (3) принимают следующий вид:*

1) в случае $\beta_1 \neq 1$: $\quad a^{N-2}b'a = Ba^{N-1}b', \quad a^{k+1}b' = Ea^{k+2}$;

2) в случае $A = 0$, $B = 1$ $(\beta_1 = 1,\ \beta_2 = \cdots = \beta_{k-N+2} = 0)$:

$$a^{N-2}b'a = a^{N-1}b', \qquad a^{k+1}b' = 0;$$

3) в случае $\beta_1 = 1$ и либо $A = 0, B \neq 1$, либо $A \neq 0, B = 1$, либо $A \neq 0, B \neq 1$:

$$a^{N-2}b'a = a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b', \qquad a^{k+1}b' = 0,$$

где $l \in \{1, \ldots, k+t-N+1\}$.

Доказательство. Пусть $b' = Xa + Yb$, где X, Y — неизвестные пока элементы подалгебры $\langle a\rangle^1$, Y — обратим.

Тогда с учетом соотношения (1) имеем, что

$$\begin{gathered} a^{N-2}b'a = a^{N-2}Xa + a^{N-2}Yba = Xa^N + Ya^{N-2}ba = \\ = Xa^N + Y\big(Aa^N + Ba^{N-1}b\big) = Xa^N + YAa^N + Ba^{N-1}\big(Yb\big) = \\ = Xa^N + YAa^N + Ba^{N-1}\big(b' - Xa\big) = Xa^N + YAa^N - XBa^N + Ba^{N-1}b' = \\ = \Big(X\big(1-B\big) + YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b'. \end{gathered}$$

Рассмотрим далее равенство $a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big) + YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b'$ при различных значениях коэффициентов $\beta_p \in F$ элемента B.

Если $\beta_1 \neq 1$, то элемент $(1-B)$ обратим, поэтому при любом Y мы сможем найти такой X, чтобы выполнялось равенство $X(1-B)+YA=0$. Это означает, что $a^{N-2}b'a = Ba^{N-1}b'$ и первое утверждение леммы доказано.

Если $A=0$, $B=1$ ($\beta_1=1$, $\beta_2=\cdots=\beta_{k-N+2}=0$), то для любого Y полагая $X=-YE$, получим, что
$a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big)+YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b' = 0 + Ba^{N-1}b' = a^{N-1}b'$,
$a^{k+1}b' = Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = \big(X+YE\big)a^{k+2} = \big(-YE+YE\big)a^{k+2} = 0.$
Второе утверждение леммы доказано.

Если $A\neq 0, B=1$, то положим $X=-\widetilde{A}^{-1}E$, $Y=\widetilde{A}^{-1}$. Тогда получим, что
$a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big)+YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b' = \Big(0+\widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}a^{s-1}\Big)a^N + Ba^{N-1}b' =$
$= a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b'$, $s\in\{1,\dots,k+t-N+1\}$,
$a^{k+1}b' = Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = \big(X+YE\big)a^{k+2} = \big(-\widetilde{A}^{-1}E + \widetilde{A}^{-1}E\big)a^{k+2} = 0.$

Рассмотрим далее случай, когда $\beta_1=1$, $\beta_2=\cdots=\beta_{n-1}=0$, $\beta_n\neq 0$ для некоторого $n\in\{2,\dots,k-N+2\}$.

В этом случае элемент B можно представить в виде
$B=\sum\limits_{p=1}^{k-N+2}\beta_p a^{p-1} = 1+\sum\limits_{p\geq n}\beta_p a^{p-1} = 1+\Big(\sum\limits_{p\geq n}\beta_p a^{p-n}\Big)a^{n-1} = 1+B_1a^{n-1}$,
где B_1 — обратим.

Если $A=0$, то положим $X=-B_1^{-1}a^{r-1}$, $Y=\big(\widetilde{E}B_1\big)^{-1}$, где $r\in\{1,\dots,t-1\}$. Тогда получим, что
$a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big)+YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b' = \Big(-XB_1a^{n-1}+0\Big)a^N + Ba^{N-1}b' =$
$= \Big(B_1^{-1}a^{r-1}B_1a^{n-1}\Big)a^N + Ba^{N-1}b' = a^{r+n+N-2} + Ba^{N-1}b'$,
$a^{k+1}b' = \big(X+YE\big)a^{k+2} = \big(-B_1^{-1}a^{r-1} + \big(\widetilde{E}B_1\big)^{-1}\widetilde{E}a^{r-1}\big)a^{k+2} = 0.$

При $A\neq 0$ возможны следующие варианты: $s\geq n$ или $s<n$ (напомним, что s такое, что $A=\widetilde{A}a^{s-1}$, $\widetilde{A}$ — обратим, $s\in\{1,\dots,k+t-N+1\}$.

При $s\geq n$ рассмотрим два случая: $(s-n)\geq(r-1)$ и $(r-1)>(s-n)$.

Если $(s-n)\geq(r-1)$, то полагая $X=-\Big(\widetilde{E}B_1+\widetilde{A}a^{s-n-r+1}\Big)^{-1}E$,
$Y=\Big(\widetilde{E}B_1+\widetilde{A}a^{s-n-r+1}\Big)^{-1}$, получим, что

$$a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big)+YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b' =$$
$$= \big(-XB_1a^{n-1}+Y\widetilde{A}a^{s-1}\big)a^N + Ba^{N-1}b' = \big(-XB_1+Y\widetilde{A}a^{s-n}\big)a^{n+N-1} + Ba^{N-1}b' =$$
$$= \Big(\widetilde{E}B_1+\widetilde{A}a^{s-n-r+1}\Big)^{-1}\Big(\widetilde{E}a^{r-1}B_1+\widetilde{A}a^{s-n}\Big)a^{n+N-1} + Ba^{N-1}b' =$$
$$= \Big(\widetilde{E}B_1+\widetilde{A}a^{s-n-r+1}\Big)^{-1}\Big(\widetilde{E}B_1+\widetilde{A}a^{s-n-r+1}\Big)a^{r+n+N-2} + Ba^{N-1}b' =$$
$$= a^{r+n+N-2} + Ba^{N-1}b',$$

$$a^{k+1}b' = Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = \big(X+YE\big)a^{k+2} =$$
$$= \Big(-\big(\widetilde{E}B_1+\widetilde{A}a^{s-n-r+1}\big)^{-1}E + -\big(\widetilde{E}B_1+\widetilde{A}a^{s-n-r+1}\big)^{-1}E\Big)a^{k+2} = 0.$$

Если $(r-1) > (s-n)$, то полагая $X = -\Big(\widetilde{E}B_1 a^{r+n-s-1} + \widetilde{A}\Big)^{-1} E$, $Y = \Big(\widetilde{E}B_1 a^{r+n-s-1} + \widetilde{A}\Big)^{-1}$, получим, что

$$\begin{gathered} a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big) + YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b' = \\ = \big(-XB_1a^{n-1} + Y\widetilde{A}a^{s-1}\big)a^N + Ba^{N-1}b' = \big(-XB_1 + Y\widetilde{A}a^{s-n}\big)a^{n+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ = \Big(\widetilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \widetilde{A}\Big)^{-1}\Big(\widetilde{E}a^{r-1}B_1 + \widetilde{A}a^{s-n}\Big)a^{n+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ = \Big(\widetilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \widetilde{A}\Big)^{-1}\Big(\widetilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \widetilde{A}\Big)a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ = a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b', \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} a^{k+1}b' = Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = \big(X + YE\big)a^{k+2} = \\ = \Big(-\big(\widetilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \widetilde{A}\big)^{-1}E + \big(\widetilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \widetilde{A}\big)^{-1}E\Big)a^{k+2} = 0. \end{gathered}$$

Если $s < n$, то полагая $X = -\Big(B_1Ea^{n-s} + \widetilde{A}\Big)^{-1}E$, $Y = \Big(B_1Ea^{n-s} + \widetilde{A}\Big)^{-1}$, получим, что

$$\begin{gathered} a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big) + YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b' = \\ = \big(-XB_1a^{n-1} + Y\widetilde{A}a^{s-1}\big)a^N + Ba^{N-1}b' = \big(-XB_1a^{n-s} + Y\widetilde{A}\big)a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ = \Big(\big(B_1Ea^{n-s} + \widetilde{A}\big)^{-1}EB_1a^{n-s} + \big(B_1Ea^{n-s} + \widetilde{A}\big)^{-1}\widetilde{A}\Big)a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ = \big(B_1Ea^{n-s} + \widetilde{A}\big)^{-1}\big(EB_1a^{n-s} + \widetilde{A}\big)a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b' = a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b', \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} a^{k+1}b' = Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = \big(X + YE\big)a^{k+2} = \\ = \Big(-\big(B_1Ea^{n-s} + \widetilde{A}\big)^{-1}E + \big(B_1Ea^{n-s} + \widetilde{A}\big)^{-1}E\Big)a^{k+2} = 0. \end{gathered}$$

Лемма доказана. □

Далее в тексте мы для удобства будем использовать запись b вместо b'.

Надо сказать, что в работе [8] подробно разобран первый пункт вышеприведенного утверждения — описаны определяющие соотношения в алгебре R и указано конкретное стандартное тождество, выполняющееся в алгебре R.

Рассмотрим отдельно второй пункт леммы 1.

Лемма 2. *Если в алгебре R выполняется соотношение $a^{N-2}ba = a^{N-1}b$, то в алгебре также выполняются следующие соотношения:*

$$g_1 \cdots g_{N+2} = a^{N+2-i}b^i,\ i = \overline{1, N+1},$$

где $g_p \in \{a, b\}$, среди которых встречается ровно i порождающих b.

Доказательство. Поскольку для любого $x \in R^N$ имеют место равенства

$x = A(x)a^N + B(x)a^{N-1}b$, $xa = A(x)a^{N+1} + B(x)a^{N-1}ba = A(x)a^{N+1} + B(x)a^Nb$,

где $A(x), B(x) \in \langle a\rangle^1$, то получим, что $[x, a] = 0$ для любого $x \in R^N$.

С другой стороны, с учетом равенства (2) имеем, что

$$\begin{gathered} xab = A(x)a^{N+1}b + B(x)a^Nb^2 = A(x)a^{N+1}b + B(x)Ca^{N+2} + B(x)Da^{N+1}b, \\ xba = A(x)a^Nba + B(x)a^{N-1}b^2a = A(x)a^{N+1}b + B(x)\big(Ca^{N+1} + Da^Nb\big)a = \\ = A(x)a^{N+1}b + B(x)Ca^{N+2} + B(x)Da^{N+1}b, \end{gathered}$$

откуда получим, что $x[a,b]=0$ для любого $x\in R^N$.

Из равенств $[x,a]=0$ и $x[a,b]=0$, очевидно, следует утверждение леммы. $\square$

Остается не до конца изученным только третий пункт леммы 1. Далее в этом параграфе мы будем рассматривать только этот случай.

В связи с вышесказанным, в нашем исследовании мы будем полагать, что основополагающими соотношениями от порождающих $a,\ b$ в алгебре R являются следующие равенства:

$$a^{N-2}ba=a^{l+N-1}+Ba^{N-1}b, \tag{4}$$

$$a^{N-2}b^2=Ca^N+Da^{N-1}b, \tag{5}$$

$$a^{k+1}b=0, \tag{6}$$

где $l\in\{1,\dots,k+t-N+1\},\ B=\sum\limits_{p=1}^{k-N+2}\beta_pa^{p-1},\ C=\sum\limits_{p=1}^{k+t-N+1}\gamma_pa^{p-1},$ $D=\sum\limits_{p=1}^{k-N+2}\delta_pa^{p-1},\ \beta_p,\ \gamma_p,\ \delta_p\in F$, причем $\beta_1=1$.

Замечание. Справедливо следующее неравенство: $l>t-2$, поскольку с учетом равенств (4), (6) имеем, что

$a^{k+1}ba=a^{k-N+3}\cdot a^{N-2}ba=a^{k-N+3}(a^{l+N-1}+Ba^{N-1}b)=a^{l+k+2}=0.$

Лемма 3. *В алгебре R выполняются соотношения*

$$a^kbg_p=\varepsilon(g_p)a^{k+t},\quad g_pa^kb=\xi(g_p)a^{k+t},$$

где $\varepsilon(g_p),\xi(g_p)\in F$, g_p – один из порождающих a,b,c_i, $i=\overline{1,s-2}$, $p=\overline{1,s}$.

Доказательство. Если $t<2$, то $a^kbg_p=g_pa^kb=0$, то есть $\varepsilon(g_p)=\xi(g_p)=0$.

Пусть далее $t\geq 2$.

Рассмотрим равенство $a^kbg_p=\varepsilon_{k+2}a^{k+2}+\ \dots\ +\varepsilon_{k+t}a^{k+t},\ \ \varepsilon_i\in F$.

Домножая слева на a, с учетом равенства (6) в алгебре R, получим, что

$$a^{k+1}bg_p=\varepsilon_{k+2}a^{k+3}+\ \dots\ +\varepsilon_{k+t-1}a^{k+t}=0.$$

Откуда следует, что $\varepsilon_{k+2}=\ \dots\ =\varepsilon_{k+t-1}=0$, и, следовательно,

$$a^kbg_p=\varepsilon_{k+t}a^{k+t}=\varepsilon(g_p)a^{k+t}.$$

Рассмотрим также равенство $g_pa^kb=\xi_{k+2}a^{k+2}+\ \dots\ +\xi_{k+t}a^{k+t},\ \ \xi_i\in F$.

Домножая справа на a, с учетом предыдущего, получим, что

$$g_pa^kba=\xi_{k+2}a^{k+3}+\ \dots\ +\xi_{k+t-1}a^{k+t}=0.$$

Откуда следует, что $\xi_{k+2}=\ \dots\ =\xi_{k+t-1}=0$, и, следовательно,

$$g_pa^kb=\xi_{k+t}a^{k+t}=\xi(g_p)a^{k+t}.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *В алгебре R для любого $u\in R^N$*

$$au=0 \text{ *тогда, и только тогда, когда* } u=\mu(u)a^{k+t}+\nu(u)a^kb,$$

$$au=\mu a^{k+t} \text{ *тогда, и только тогда, когда* } u=A(u)a^{k+t-1}+\nu(u)a^kb,$$

для некоторых $\mu(u),\nu(u)\in F$, $A(u)\in\langle a\rangle^1$.

Доказательство. Элемент $u \in R^N$ можно представить в следующем виде:

$$u = \mu_1 a^N + \ \dots \ + \mu_{k+t-N+1} a^{k+t} + \nu_1 a^{N-1} b + \ \dots \ + \nu_{k-N+2} a^k b, \ \mu_i, \nu_i \in F.$$

Тогда с учетом равенства (6) получим равенство

$$au = \mu_1 a^{N+1} + \ \dots \ + \mu_{k+t-N} a^{k+t} + \nu_1 a^{N-1} b + \nu_{k-N+1} a^k b.$$

Предположим, что $au = 0$.

Тогда $\mu_1 = \ \dots \ = \mu_{k+t-N} = \nu_1 = \ \dots \ = \nu_{k-N+1} = 0$, и имеет место равенство

$$u = \mu_{k+t-N+1} a^{k+t} + \nu_{k-N+2} a^k b = \mu(u) a^{k+t} + \nu(u) a^k b.$$

В обратную сторону утверждение очевидно.

Предположим, что $au = \mu a^{k+t}, \ \mu \neq 0$.

Тогда

$$au - \mu a^{k+t} = \mu_1 a^{N+1} + \ \dots \ + \mu_{k+t-N-1} a^{k+t-1} + (\mu_{k+t-N} - \mu) a^{k+t} + \ \dots$$
$$\dots \ + \nu_1 a^{N-1} b + \nu_{k-N+1} a^k b = 0,$$

и, значит, $\mu_1 = \ \dots \ = \mu_{k+t-N-1} = \nu_1 = \ \dots \ = \nu_{k-N+1} = 0, \ \mu_{k+t-N} = \mu$ (при $k = N$ и $t = 1$: $\nu_1 = 0, \ \mu_1 = \mu$).

Получим, что

$$u = \mu a^{k+t-1} + \mu_{k+t-N+1} a^{k+t} + \nu_{k-N+2} a^k b = A(u) a^{k+t-1} + \nu(u) a^k b,$$

где $A(u) = \mu + \mu_{k+t-N+1} a \ \in \ \langle a \rangle^1$.

В обратную сторону утверждение очевидно. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Если в алгебре R для элемента $u \in R^{N-n}$, $n \in \{1, \dots, N-1\}$, справедливо равенство $a^n u = \mu a^{k+t} + \nu a^k b$, $\mu, \nu \in F$, то имеют место также следующие равенства:*

$$a^{n-r} u g_1 \cdots g_r = A(u, g_1, \cdots, g_r) a^{k+t-1} + \nu(u, g_1, \cdots, g_r) a^k b, \ r = \overline{1, n},$$

для некоторых $\nu(g_1, \cdots, g_r) \in F$, $A(u, g_1, \cdots, g_r) \in \langle a \rangle^1$ и порождающих $g_p \in \{a, b, c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, $p = \overline{1, r}$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по $r = \overline{1, n}$.

Очевидно, что из равенства $a^n u = \mu a^{k+t} + \nu a^k b$ с учетом леммы 3 следует, что $a^n u g_1 = \mu' a^{k+t}$, $\mu' \in F$, и, с учетом леммы 4, имеем, что

$$a^{n-1} u g_1 = A(u, g_1) a^{k+t-1} + \nu(u, g_1) a^k b, \ \nu(u, g_1) \in F, \ A(u, g_1) \in \langle a \rangle^1.$$

Предположим, что имеет место следующее равенство:

$$a^{n-r+1} u g_1 \cdots g_{r-1} = A(u, g_1, \cdots, g_{r-1}) a^{k+t-1} + \nu(u, g_1, \cdots, g_{r-1}) a^k b,$$

где $\nu(u, g_1, \cdots, g_{r-1}) \in F, \ A(u, g_1, \cdots, g_{r-1}) \in \langle a \rangle^1$.

Рассмотрим элемент $a^{n-r} u g_1 \cdots g_{r-1} g_r$.

С учетом индукционного предположения и леммы 3 имеем, что

$$a^{n-r+1} u g_1 \cdots g_{r-1} g_r = \mu'' a^{k+t}, \ \mu'' \in F.$$

Отсюда, по лемме 4, получим следующее равенство:

$$a^{n-r} u g_1 \cdots g_{r-1} g_r = A(u, g_1, \cdots, g_r) a^{k+t-1} + \nu(u, g_1, \cdots, g_r) a^k b,$$

для некоторых $\nu(g_1, \cdots, g_r) \in F, \ A(u, g_1, \cdots, g_r) \in \langle a \rangle^1$.

Лемма доказана. □

Лемма 6. *Если в алгебре R для элемента $u \in R^{N-n}$, $n \in \{1,\ldots,N-1\}$, справедливо равенство $a^n u = 0$, то имеют место также следующие равенства:*

$$ug_1g_2\cdots g_{n+2} = g_1ug_2\cdots g_{n+2} = \cdots = g_1g_2\cdots g_{n+2}u = 0,$$

где $g_p \in \{a,\ b,\ c_i\}$ — произвольные порождающие, $i = \overline{1, s-2}$.

Доказательство. Очевидно, что равенство $ug_1g_2\cdots g_{n+2} = 0$ следует непосредственно из леммы 5.

Рассмотрим элемент

$$g_1ug_2\cdots g_n = \mu_1a^N + \ldots + \mu_{k+t-N+1}a^{k+t} + \lambda_1a^{N-1}b + \ldots + \lambda_{k-N+2}a^kb,\ \mu_i,\lambda_i \in F.$$

Домножая справа на a, с учетом соотношения (4), лемм 3 и 5 получим, что

$$\begin{gathered} g_1ug_2\cdots g_na = \mu_1a^{N+1} + \ \ldots\ + \mu_{k+t-N}a^{k+t} + \lambda_1a^{N-1}ba + \ \ldots\ + \lambda_{k-N+2}a^kba = \\ = \mu_1a^{N+1} + \ \ldots\ + \mu_{k+t-N}a^{k+t} + \lambda_1a(a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) + \ \ldots \\ \ldots\ + \lambda_{k-N+1}a^{k-N+1}(a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) + \lambda_{k-N+2}a^{k-N+2}(a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) = \\ = \mu_1a^{N+1} + \ \ldots\ + \mu_{k+t-N-1}a^{k+t-1} + \mu_{k+t-N}a^{k+t} + \lambda_1a^{l+N} + \ \ldots \\ \ldots\ + \lambda_{k-N+1}a^{l+k} + \lambda_{k-N+2}a^{l+k+1} + B(\lambda_1a^Nb + \ \ldots\ + \lambda_{k-N+1}a^kb) = \mu a^{k+t}. \end{gathered}$$

По замечанию $l > t-2$, то есть $a^{l+k+1} = \varepsilon a^{k+t}$, где $\varepsilon \in \{0,1\}$, и поэтому имеет место следующее равенство:

$$\begin{gathered} \mu_1a^{N+1} + \ \ldots\ + \mu_{k+t-N-1}a^{k+t-1} + \mu'a^{k+t} + \lambda_1a^{l+N} + \ \ldots\ + \lambda_{k-N+1}a^{l+k} + \\ + B(\lambda_1a^Nb + \ \ldots\ + \lambda_{k-N+1}a^kb) = 0, \end{gathered}$$

где $\mu' = \mu_{k+t-N} + \lambda_{k-N+2}\varepsilon - \mu$.

Поскольку элемент B обратим (так как $\beta_1 = 1$), то $\lambda_1 = \ \ldots\ = \lambda_{k-N+1} = 0$ и, как следствие, $\mu_1 = \ \ldots\ = \mu_{k+t-N-1} = 0$.

Следовательно,

$$g_1ug_2\cdots g_n = A_1a^{k+t-1} + \nu_1a^kb,$$

для некоторых $\nu_1 \in F,\ A_1 \in \langle a\rangle^1$ и порождающих $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Рассмотрим далее элемент

$$g_1g_2ug_3\cdots g_n = \mu_1'a^N + \ldots + \mu_{k+t-N+1}'a^{k+t} + \lambda_1'a^{N-1}b + \ldots + \lambda_{k-N+2}'a^kb,\ \mu_i', \lambda_i' \in F.$$

Домножая справа на a, с учетом соотношения (4) и того, что имеет место равенство $g_2ug_3\cdots g_na = A_1'a^{k+t-1} + \nu_1'a^kb$, для некоторых $\nu_1' \in F,\ A_1' \in \langle a\rangle^1$, получим, что

$$\begin{gathered} g_1g_2ug_3\cdots g_na = \mu_1'a^{N+1} + \ \ldots\ + \mu_{k+t-N}'a^{k+t} + \lambda_1'a^{N-1}ba + \ \ldots\ + \lambda_{k-N+2}'a^kba = \\ = \mu_1'a^{N+1} + \ \ldots\ + \mu_{k+t-N}'a^{k+t} + \lambda_1'a(a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) + \ \ldots \\ \ldots\ + \lambda_{k-N+1}'a^{k-N+1}(a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) + \lambda_{k-N+2}'a^{k-N+2}(a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) = \\ = \mu_1'a^{N+1} + \ \ldots\ + \mu_{k+t-N-1}'a^{k+t-1} + \mu_{k+t-N}'a^{k+t} + \lambda_1'a^{l+N} + \ \ldots \\ \ldots\ + \lambda_{k-N+1}'a^{l+k} + \lambda_{k-N+2}'a^{l+k+1} + B(\lambda_1'a^Nb + \ \ldots\ + \lambda_{k-N+1}'a^kb) = \mu''a^{k+t}. \end{gathered}$$

Следовательно, $\lambda_1' = \ \ldots\ = \lambda_{k-N+1}' = 0$ и $\mu_1' = \ \ldots\ = \mu_{k+t-N-1}' = 0$, и, поэтому, $g_1g_2ug_3\cdots g_n = A_2a^{k+t-1} + \nu_2a^kb$, для некоторых $\nu_2 \in F,\ A_2 \in \langle a\rangle^1$ и порождающих $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Продолжая этот процесс, получим, что

$$\begin{gathered} g_1ug_2\cdots g_n = A_1a^{k+t-1} + \nu_1a^kb, \\ g_1g_2ug_3\cdots g_n = A_2a^{k+t-1} + \nu_2a^kb, \\ \ldots\ ,\ \ldots\ ,\ldots\ , \\ g_1g_2\cdots g_nu = A_na^{k+t-1} + \nu_na^kb, \end{gathered}$$

для некоторых $\nu_1, \dots, \nu_n \in F$, $A_1, \dots, A_n \in \langle a \rangle^1$ и порождающих $g_1, g_2, \dots, g_n$.

Домножая эти равенства справа и слева на произвольные порождающие g' и g'', после естественных переобозначений получим, что

$$ug_1g_2\cdots g_{n+2} = g_1ug_2\cdots g_{n+2} = \cdots = g_1g_2\cdots g_{n+2}u = 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 7. *В алгебре R выполняются следующие соотношения:*

$$a^{M-i-1}ba^i = \big(1 + B + \ \dots\ + B^{i-1}\big)a^{l+M-1} + B^ia^{M-1}b + \nu_ia^kb + A_ia^{k+t-1},$$

где $i = \overline{1, M-1}$, $M \geq N$, $\nu_i \in F$, $A_i \in \langle a \rangle^1$, l и B — из соотношения (4).

Доказательство. Ввиду (4) в алгебре R выполняется соотношение

$$a^{N-2}ba = a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b.$$

Очевидно, что в результате домножения

$$a^{M-N} \cdot a^{N-2}ba = a^{M-N}(a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b)$$

в алгебре R также выполняется соотношение

$$a^{M-2}ba = a^{l+M-1} + Ba^{M-1}b,$$

где $M \geq N$.

Домножая указанное равенство справа на a, получим, что

$$\begin{gathered} a^{M-2}ba \cdot a = a^{l+M} + Ba^{M-1}ba = \\ = a^{l+M} + Ba\big(a^{l+M-1} + Ba^{M-1}b\big) = \big(1 + B\big)a^{l+M} + B^2a^Mb. \end{gathered}$$

С учетом леммы 4 получим следующее равенство:

$$a^{M-3}ba^2 = \big(1 + B\big)a^{l+M-1} + B^2a^{M-1}b + \nu_2a^kb + A_2a^{k+t-1},\ \nu_2 \in F, A_2 \in \langle a \rangle^1.$$

Проводя доказательство индукцией по $i > 1$, предположим, что для некоторых $\nu_{i-1} \in F$, $A_{i-1} \in \langle a \rangle^1$, имеет место равенство

$$a^{M-i}ba^{i-1} = \big(1 + B + \ \dots\ + B^{i-2}\big)a^{l+M-1} + B^{i-1}a^{M-1}b + \nu_{i-1}a^kb + A_{i-1}a^{k+t-1}.$$

Тогда, домножая это равенство справа на a, с учетом леммы 3 и равенства (4) для некоторого $\mu \in F$ получим, что

$$\begin{gathered} a^{M-i}ba^i = \big(1 + B + \ \dots\ + B^{i-2}\big)a^{l+M} + B^{i-1}a^{M-1}ba = \\ = \big(1 + B + \ \dots\ + B^{i-2}\big)a^{l+M} + B^{i-1}a\big(a^{l+M-1} + Ba^{M-1}b\big) = \\ = \big(1 + B + \ \dots\ + B^{i-2} + B^{i-1}\big)a^{l+M} + B^ia^Mb + \mu a^{k+t}. \end{gathered}$$

Откуда с учетом леммы 4 имеем, что

$$a^{M-i-1}ba^i = \big(1 + B + \ \dots\ + B^{i-1}\big)a^{l+M-1} + B^ia^{M-1}b + \nu_ia^kb + A_ia^{k+t-1}$$

для некоторых $\nu_i \in F$, $A_i \in \langle a \rangle^1$.

Лемма доказана. □

Предложение 1. *В алгебре R выполняются следующие соотношения:*

$$a^nP(i_1, i_2, i_3;\ m)\ g_1 \cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n} = 0,$$

где $P(i_1, i_2, i_3;\ m) = \sum\limits_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma a^{\sigma(i_1)}(ba^m)a^{\sigma(i_2)}ba^{\sigma(i_3)} = 0$, i_1, i_2, i_3, такие что $0 \leq i_1 < i_2 < i_3$, $m \geq 0$, $n \geq 0$, $i_1 + i_2 + i_3 + m + n \leq M$, $M \geq N$, g_p – произвольные порождающие из $\{a, b, c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, $p = \overline{1, M - i_1 - i_2 - i_3 - m - n}$.

Доказательство. В соответствии с утверждением леммы 7 в алгебре R выполняется соотношение
$a^{M-j_2-1}ba^{j_2} = \left(1+B+\ \ldots\ +B^{j_2-1}\right)a^{l+M-1}+B^{j_2}a^{M-1}b+\nu_{j_2}a^kb+A^0_{j_2}a^{k+t-1}$
для некоторых $\nu_{j_2}\in F$ $\left(j_2\in\{1,M-1\}\right)$, $A^0_{j_2}\in\langle a\rangle^1$.

Домножая указанное равенство справа на b, с учетом леммы 3 и равенства (5) получим для некоторого $\rho_{j_2}\in F$, что

$$\begin{gathered}a^{M-j_2-1}ba^{j_2}b=\left(1+B+\ \ldots\ +B^{j_2-1}\right)a^{l+M-1}b+B^{j_2}a^{M-1}b^2=\\=\left(1+B+\ \ldots\ +B^{j_2-1}\right)a^{l+M-1}b+B^{j_2}Ca^{M+1}+B^{j_2}Da^Mb+\rho_{j_2}a^{k+t}.\end{gathered}$$

По лемме 4 имеем следующее равенство:

$$\begin{gathered}a^{M-2-j_2}ba^{j_2}b\equiv\\\equiv\left(1+B+\ \ldots\ +B^{j_2-1}\right)a^{l+M-2}b+B^{j_2}Ca^M+B^{j_2}Da^{M-1}b+\mu_0a^kb+A_0a^{k+t-1}\end{gathered}$$

для некоторых $\mu_0\in F,\ A_0\in\langle a\rangle^1$.

Домножая указанное равенство справа на a, с учетом леммы 3 и равенства (4) получим для некоторого $\lambda_1\in F$, что

$$\begin{gathered}a^{M-2-j_2}ba^{j_2}ba=\left(1+B+\ \ldots\ +B^{j_2-1}\right)a^{l+M-2}ba+B^{j_2}Ca^{M+1}+B^{j_2}Da^{M-1}ba=\\=\left(1+B+\ \ldots\ +B^{j_2-1}\right)a^l\left(a^{l+M-1}+Ba^{M-1}b\right)+B^{j_2}Ca^{M+1}+\\+B^{j_2}Da\left(a^{l+M-1}+Ba^{M-1}b\right)=B^{j_2}Ca^{M+1}+\left(1+B+\ \ldots\ +B^{j_2-1}\right)a^{2l+M-1}+\\+B\left(1+B+\ \ldots\ +B^{j_2-1}\right)a^{l+M-1}b+B^{j_2}Da^{l+M}+B^{j_2+1}Da^Mb+\lambda_1a^{k+t}.\end{gathered}$$

Для удобства перепишем это равенство в следующем виде:

$$\begin{gathered}a^{M-2-j_2}ba^{j_2}ba=\\=G_1a^{M+1}+B\left(1+B+\ \ldots\ +B^{j_2-1}\right)a^{l+M-1}b+B^{j_2+1}Da^Mb+\lambda_1a^{k+t},\end{gathered}$$

где $G_1\in\langle a\rangle^1$.

По лемме 4 имеем следующее равенство:

$$\begin{gathered}a^{M-2-j_2-1}ba^{j_2}ba=\\=G_1a^M+B\left(1+B+\ \ldots\ +B^{j_2-1}\right)a^{l+M-2}b+B^{j_2+1}Da^{M-1}b+\mu_1a^kb+A_1a^{k+t-1},\end{gathered}$$

для некоторых $\mu_1\in F,\ A_1\in\langle a\rangle^1$.

Продолжая этот процесс домножения справа на a, получим, что

$$\begin{gathered}a^{M-2-j_2-j_3}ba^{j_2}ba^{j_3}=G_{j_3}a^M+B^{j_3}\left(1+B+\ \ldots\ +B^{j_2-1}\right)a^{l+M-2}b+\\+B^{j_2+j_3}Da^{M-1}b+\mu_{j_3}a^kb+A_{j_3}a^{k+t-1},\end{gathered}\tag{7}$$

для некоторых $\mu_{j_3}\in F,\ A_{j_3}\in\langle a\rangle^1,\ j_2+j_3\le M-2,\ \ G_{j_3}\in\langle a\rangle^1$.

С другой стороны, домножая равенство (5) справа на a, имеем, что

$$\begin{gathered}a^{M-2}b^2a=Ca^{M+1}+Da^{M-1}ba=Ca^{M+1}+Da\left(a^{l+M-1}+Ba^{M-1}b\right)=\\=Ca^{M+1}+Da^{l+M}+BDa^Mb=H_1a^{M+1}+BDa^Mb,\end{gathered}$$

где $H_1\in\langle a\rangle^1$.

С учетом леммы 4 получим следующее равенство:

$$a^{M-3}b^2a=H_1a^M+BDa^{M-1}b+\nu_1a^kb+A'_1a^{k+t-1}$$

для некоторых $\nu_1\in F,\ A'_1\in\langle a\rangle^1$.

Продолжая этот процесс домножения справа на a, получим, что

$$a^{M-2-i}b^2a^i = H_ia^M + B^iDa^{M-1}b + \nu_ia^kb + A'_ia^{k+t-1}$$

для некоторых $\nu_i \in F,\ A'_i \in \langle a\rangle^1,\ i \in \{0, M-2\},\ \ H_i \in \langle a\rangle^1$.

При $i = j_2 + j_3$ имеем следующее равенство:

$$a^{M-2-j_2-j_3}b^2a^{j_2+j_3} = H_ia^M + B^{j_2+j_3}Da^{M-1}b + \nu_ia^kb + A'_ia^{k+t-1}.$$

Рассматривая разность равенства (7) и последнего равенства, получим, что

$$a^{M-2-j_2-j_3}\big(ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3}\big) =$$
$$= Ka^M + B^{j_3}\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{l+M-2}b + \rho a^kb + A''a^{k+t-1},$$

где $K = \big(G_{j_3} - H_i\big) \in \langle a\rangle^1,\ \rho = (\mu_{j_3} - \nu_i) \in F,\ A'' = A_{j_3} - A'_i$.

Домножая это равенство справа на a, с учетом леммы 3 и равенства (4) получим для некоторого $\lambda_2 \in F$, что

$$a^{M-2-j_2-j_3}\big(ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3}\big)a =$$
$$= Ka^{M+1} + B^{j_3}\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^l\big(a^{l+M-1} + Ba^{M-1}b\big) =$$
$$= Ka^{M+1} + B^{j_3}\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{2l+M-1} +$$
$$+ B^{j_3+1}\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{l+M-1}b + \lambda_2a^{k+t},$$

По лемме 4 имеем следующее равенство:

$$a^{M-2-j_2-j_3-1}\big(ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3}\big)a =$$
$$= Ka^M + B^{j_3}\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{2l+M-2} +$$
$$+ B^{j_3+1}\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{l+M-2}b + \rho_1a^kb + A''_1a^{k+t-1}$$

для некоторых $\rho_1 \in F,\ A''_1 \in \langle a\rangle^1$.

Продолжая этот процесс домножения справа на a, получим, что

$$a^{M-2-j_2-j_3-j}\big(ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3}\big)\cdot a^j =$$
$$= Ka^M + B^{j_3}\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j-1}\big)\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{2l+M-2} +$$
$$+ B^{j_3+j}\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{l+M-2}b + \rho_ja^kb + A''_ja^{k+t-1}$$

для некоторых $\rho_j \in F,\ A''_j \in \langle a\rangle^1,\ j \ge 1,\ j_2 + j_3 + j \le M - 2$.

Также очевидно, что

$$a^j\cdot a^{M-2-j_2-j_3-j}\big(ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3}\big) =$$
$$= Ka^M + B^{j_3}\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{l+M-2}b + \rho a^kb + A''a^{k+t-1}.$$

Следовательно, имеет место следующее равенство:

$$a^{M-2-j_2-j_3-j}\big[ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3}, a^j\big] =$$
$$= B^{j_3}\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j-1}\big)\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{2l+M-2} +$$
$$+ B^{j_3}\big(B^j - 1\big)\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{l+M-2}b + (\rho_j - \rho)a^kb + (A''_j - A'')a^{k+t-1}.$$

Откуда получим, что

$$a^{M-2-j_2-j_3-j}\Big([ba^{j_2}ba^{j_3}, a^j] - [b^2a^{j_2+j_3}, a^j] -$$
$$- B^{j_3}\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j-1}\big)\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{2l+j_2+j_3+j} -$$
$$- B^{j_3}\big(B^j - 1\big)\big(1 + B + \ \dots\ + B^{j_2-1}\big)a^{l+j_2+j_3+j}b\Big) = (\rho_j - \rho)a^kb + (A''_j - A'')a^{k+t-1}.$$

Тогда по лемме 5 для $r \ge 1$ имеем следующее равенство:

$$a^{M-2-j_2-j_3-j-r}\Big([ba^{j_2}ba^{j_3},a^j]-[b^2a^{j_2+j_3},a^j]-$$
$$-B^{j_3}\big(1+B+\ \dots\ +B^{j-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{j_2-1}\big)a^{2l+j_2+j_3+j}-$$
$$-B^{j_3}\big(B^j-1\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{j_2-1}\big)a^{l+j_2+j_3+j}b\Big)g_1\cdots g_r=\widehat{\rho}a^kb+\widehat{A}a^{k+t-1}$$

для некоторых $\widehat{\rho}\in F$, $\widehat{A}\in\langle a\rangle^1$, и порождающих $g_p\in\{a,b,c_i\}$, $i=\overline{1,s-2}$, $p=\overline{1,r}$, при $j_2+j_3+j+r\le M-2$.

Поскольку $R^{k+t+1}=0$, с учетом леммы 3 получим, что

$$a^{M-2-j_2-j_3-j-r}\Big([ba^{j_2}ba^{j_3},a^j]-[b^2a^{j_2+j_3},a^j]-$$
$$-B^{j_3}\big(1+B+\ \dots\ +B^{j-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{j_2-1}\big)a^{2l+j_2+j_3+j}-$$
$$-B^{j_3}\big(B^j-1\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{j_2-1}\big)a^{l+j_2+j_3+j}b\Big)g_1\cdots g_rg_{r+1}g_{r+2}=0.$$

Введя новые обозначения $n+j_1=M-2-j_2-j_3-j-r$, $n\ge 0$, $j_1\ge 0$ (при этом $r+2=M-j_1-j_2-j_3-j-n$), имеем следующее равенство:

$$a^n\Big(a^{j_1}[ba^{j_2}ba^{j_3},a^j]-a^{j_1}[b^2a^{j_2+j_3},a^j]-$$
$$(8)\quad -B^{j_3}\big(1+B+\ \dots\ +B^{j-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{j_2-1}\big)a^{2l+j_1+j_2+j_3+j}-$$
$$-B^{j_3}\big(B^j-1\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{j_2-1}\big)a^{l+j_1+j_2+j_3+j}b\Big)g_1\cdots g_{M-j_1-j_2-j_3-j-n}=0,$$

где $j_1+j_2+j_3+j+n\le M$.

Приступим теперь к доказательству непосредственно самого утверждения предложения.

Рассмотрим следующее выражение:

$$a^nP(i_1,i_2,i_3;\ m)\ g_1\cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n},$$

где $P(i_1,i_2,i_3;\ m)=\sum\limits_{\sigma\in S_3}(-1)^\sigma a^{\sigma(i_1)}(ba^m)a^{\sigma(i_2)}ba^{\sigma(i_3)}=0$, i_1,i_2,i_3, такие что $0\le i_1<i_2<i_3$, $m\ge 0$, $n\ge 0$, $i_1+i_2+i_3+m+n\le M$, $M\ge N$, g_p – произвольные порождающие из $\{a,b,c_i\}$, $i=\overline{1,s-2}$, $p=\overline{1,N-i_1-i_2-i_3-m-n}$.

Легко видеть, что

$$a^nP(i_1,i_2,i_3;\ m)\ g_1\cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n}=$$
$$=a^n\Big(\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^\sigma a^{\sigma(i_1)}(ba^m)a^{\sigma(i_2)}ba^{\sigma(i_3)}\Big)\ g_1\cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n}=$$
$$=a^n\Big((a^{i_1}ba^{m+i_2}ba^{i_3}-a^{i_3}ba^{m+i_2}ba^{i_1})+(a^{i_2}ba^{m+i_3}ba^{i_1}-a^{i_1}ba^{m+i_3}ba^{i_2})+$$
$$+(a^{i_3}ba^{m+i_1}ba^{i_2}-a^{i_2}ba^{m+i_1}ba^{i_3})\Big)\ g_1\cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n}=$$
$$=a^n\Big(a^{i_1}[ba^{m+i_2}ba^{i_1},a^{i_3-i_1}]-a^{i_1}[ba^{m+i_3}ba^{i_1},a^{i_2-i_1}]-$$
$$-a^{i_2}[ba^{m+i_1}ba^{i_2},a^{i_3-i_2}]\Big)\ g_1\cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n}.$$

Используя равенство (8), получим, что

$$a^nP(i_1,i_2,i_3;\ m)\ g_1\cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n}=$$
$$=a^n\Big(a^{i_1}[b^2a^{m+i_1+i_2},a^{i_3-i_1}]+$$
$$+B^{i_1}\big(1+B+\ \dots\ +B^{i_3-i_1-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}\big)a^{2l+i_1+i_2+i_3+m}+$$
$$+B^{i_1}\big(B^{i_3-i_1}-1\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}\big)a^{l+i_1+i_2+i_3+m}b-$$
$$-a^{i_1}[b^2a^{m+i_1+i_3},a^{i_2-i_1}]-$$

$$-B^{i_1}\big(1+B+\ \dots\ +B^{i_2-i_1-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_3-1}\big)a^{2l+i_1+i_2+i_3+m}-$$
$$-B^{i_1}\big(B^{i_2-i_1}-1\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_3-1}\big)a^{l+i_1+i_2+i_3+m}b-$$
$$-a^{i_2}[b^2a^{m+i_1+i_2},a^{i_3-i_2}]-$$
$$-B^{i_2}\big(1+B+\ \dots\ +B^{i_3-i_2-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_1-1}\big)a^{2l+i_1+i_2+i_3+m}-$$
$$-B^{i_2}\big(B^{i_3-i_2}-1\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_1-1}\big)a^{l+i_1+i_2+i_3+m}b\Big)\ g_1\cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n}.$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$a^{i_1}[b^2a^{m+i_1+i_2},a^{i_3-i_1}]-a^{i_1}[b^2a^{m+i_1+i_3},a^{i_2-i_1}]-a^{i_2}[b^2a^{m+i_1+i_2},a^{i_3-i_2}].$$

Преобразовав его, получим следующее равенство:

$$[b^2a^{m+i_1+i_2},a^{i_3}]-[b^2a^{m+i_1+i_2},a^{i_1}]a^{i_3-i_1}-$$
$$-[b^2a^{m+i_1+i_3},a^{i_2}]+[b^2a^{m+i_1+i_3},a^{i_1}]a^{i_2-i_1}-$$
$$-[b^2a^{m+i_1+i_2},a^{i_3}]+[b^2a^{m+i_1+i_2},a^{i_2}]a^{i_3-i_2}=$$
$$=-[b^2a^{m+i_1+i_2},a^{i_1}]a^{i_3-i_1}-[b^2a^{m+i_1+i_3},a^{i_2}]+$$
$$+[b^2a^{m+i_1+i_3},a^{i_1}]a^{i_2-i_1}+[b^2a^{m+i_1+i_2},a^{i_2}]a^{i_3-i_2}=$$
$$=-[b^2a^{m+i_2+i_3},a^{i_1}]-[b^2a^{m+i_1+i_3},a^{i_2}]+$$
$$+[b^2a^{m+i_2+i_3},a^{i_1}]+[b^2a^{m+i_1+i_3},a^{i_2}]=0.$$

Рассмотрим далее выражения при элементах $a^{2l+i_1+i_2+i_3+m}$ и $a^{l+i_1+i_2+i_3+m}b$ и проведем также необходимые преобразования.

$$B^{i_1}\big(1+B+\ \dots\ +B^{i_3-i_1-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}\big)-$$
$$-B^{i_1}\big(1+B+\ \dots\ +B^{i_2-i_1-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_3-1}\big)-$$
$$-B^{i_2}\big(1+B+\ \dots\ +B^{i_3-i_2-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_1-1}\big)=$$
$$=\big(B^{i_1}+B^{i_1+1}+\ \dots\ +B^{i_3-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}\big)-$$
$$-\big(B^{i_1}+B^{i_1+1}+\ \dots\ +B^{i_2-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_3-1}\big)-$$
$$-\big(B^{i_2}+B^{i_2+1}+\ \dots\ +B^{i_3-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_1-1}\big)=$$
$$=\big(B^{i_1}+\ \dots\ +B^{i_2-1}+B^{i_2}+\ \dots\ +B^{i_3-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}\big)-$$
$$-\big(B^{i_1}+B^{i_1+1}+\ \dots\ +B^{i_2-1}\big)\big(1+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}+B^{m+i_2}+\ \dots\ +B^{m+i_3-1}\big)-$$
$$-\big(B^{i_2}+B^{i_2+1}+\ \dots\ +B^{i_3-1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_1-1}\big)=$$
$$=\big(B^{i_1}+\dots+B^{i_2-1}\big)\big(1+\dots+B^{m+i_2-1}\big)+\big(B^{i_2}+\dots+B^{i_3-1}\big)\big(1+\dots+B^{m+i_2-1}\big)-$$
$$-\big(B^{i_1}+\ \dots\ +B^{i_2-1}\big)\big(1+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}\big)-$$
$$-\big(B^{i_1}+\ \dots\ +B^{i_2-1}\big)\big(B^{m+i_2}+\ \dots\ +B^{m+i_3-1}\big)-$$
$$-\big(B^{i_2}+\ \dots\ +B^{i_3-1}\big)\big(1+\ \dots\ +B^{m+i_1-1}\big)=$$
$$=\big(B^{i_2}+\ \dots\ +B^{i_3-1}\big)\big(1+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}\big)-$$
$$-\big(B^{m+i_1}+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}\big)\big(B^{i_2}+\ \dots\ +B^{i_3-1}\big)-$$
$$-\big(B^{i_2}+\ \dots\ +B^{i_3-1}\big)\big(1+\ \dots\ +B^{m+i_1-1}\big)=$$
$$=\big(B^{i_2}+\ \dots\ +B^{i_3-1}\big)\big(1+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}-$$
$$-1-\ \dots\ -B^{m+i_1-1}-B^{m+i_1}-\ \dots\ -B^{m+i_2-1}\big)=0.$$

$$B^{i_1}\big(B^{i_3-i_1}-1\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}\big)-$$
$$-B^{i_1}\big(B^{i_2-i_1}-1\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_3-1}\big)-$$
$$-B^{i_2}\big(B^{i_3-i_2}-1\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_1-1}\big)=$$
$$=\big(B^{i_3}-B^{i_1}\big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{m+i_2-1}\big)-$$

$$
\begin{gathered}
-\left(B^{i_2}-B^{i_1}\right)\left(1+B+\ \ldots\ +B^{m+i_3-1}\right)- \\
-\left(B^{i_3}-B^{i_2}\right)\left(1+B+\ \ldots\ +B^{m+i_1-1}\right)= \\
=B^{i_3}+B^{i_3+1}+\ \ldots\ +B^{m+i_2+i_3-1}-B^{i_1}-B^{i_1+1}-\ \ldots\ -B^{m+i_1+i_2-1}- \\
-B^{i_2}-B^{i_2+1}-\ \ldots\ -B^{m+i_2+i_3-1}+B^{i_1}+B^{i_1+1}+\ \ldots\ +B^{m+i_1+i_3-1}- \\
-B^{i_3}-B^{i_3+1}-\ \ldots\ -B^{m+i_1+i_3-1}+B^{i_2}+B^{i_2+1}+\ \ldots\ +B^{m+i_1+i_2-1}= \\
=B^{m+i_1+i_3}+\ \ldots\ +B^{m+i_2+i_3-1}+B^{m+i_1+i_2}+\ \ldots\ +B^{m+i_1+i_3-1}- \\
-B^{m+i_1+i_2}-\ \ldots\ -B^{m+i_2+i_3-1}= \\
=B^{m+i_1+i_3}+\ \ldots\ +B^{m+i_2+i_3-1}-B^{m+i_1+i_3}-\ \ldots\ -B^{m+i_2+i_3-1}=0.
\end{gathered}
$$

Таким образом, $a^n P(i_1,i_2,i_3;\ m)\ g_1\cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n}=0.$
Предложение доказано. □

Обратимся теперь к выполняющиеся в алгебре R соотношениям, в записи которых наверняка встречается хотя бы один из порождающих $c_i,\ i=\overline{1,s-2}$.
С этой целью, приведем доказанные в работе [9] предложения.

Предложение 1. [9]. *Если $\beta_1\neq 0$, то в алгебре R для любого $i\in\{1,\ldots,s-2\}$ выполняются соотношения*

$$g_1g_2\cdots g_N c_i=0;$$

$$c_ig_1g_2\cdots g_{N-1}\equiv g_1c_ig_2\cdots g_{N-1}\equiv\cdots\equiv g_1g_2\cdots g_{N-1}c_i\equiv 0\pmod{R^{k+1}};$$

$$c_ig_1g_2\cdots g_{N+1}=g_1c_ig_2\cdots g_{N+1}=\cdots=g_1g_2\cdots g_{N+1}c_i=0,$$

где $g_p\in\{a,\ b,\ c_m\}$ – порождающие, $m=\overline{1,s-2}$.

Предложение 2. [9]. *Если $\beta_1=0$, то в алгебре R на порождающих $g_i\in\{a,\ b,\ c_i\}$, $i=\overline{1,s-2}$, выполняются следующие соотношения:*

$$g_1\cdots g_r\bigl(g_{r+1}\cdots g_{N+p}-g_{\sigma(r+1)}\cdots g_{\sigma(N+p)}\bigr)=0,\quad p\geq 2,$$

для любых $r\in\{1,\ldots,N+p-2\}$, для любых $\sigma\in S_{N+p-r}$, при условии, что среди порождающих $g_1,\ldots,g_r\in\{a,\ b,\ c_i\}$ встречается по крайней мере один порождающий, отличный от a.

Следствие. *Если $\beta_1=0$, то в алгебре R на порождающих $g_i\in\{a,\ b,\ c_i\}$, $i=\overline{1,s-2}$, выполняются следующие соотношения:*

$$\Bigl[g_1\cdots g_{r_1},\ g_{r_1+1}\cdots g_{r_2}\Bigr]\Bigl[g_{r_2+1}\cdots g_{r_3},\ g_{r_3+1}\cdots g_{r_4}\Bigr]g_{r_4+1}\cdots g_{N+p}=0,$$

где $p\geq 2$, $0<r_1<r_2<r_3<r_4\leq N+p$.

Заметим, что доказательство последних двух предложений не зависело от характеристики основного поля F.

4. Стандартное тождество в алгебре R

Предложим теперь обобщение основного результата работы [9].

Следующая теорема предоставляет алгоритм нахождения степени минимального тождества s-порожденной нильпотентной алгебры над произвольным полем с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2$ (для некоторого $N\geq 3$) для бесконечного множества значений N определенного вида.

Теорема. *Пусть R — произвольная s-порожденная ($s\geq 2$) нильпотентная алгебра над полем с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2$ для некоторого $N\geq 3$. Тогда*

1) если $s < N+2$, то R удовлетворяет стандартному тождеству $S_T(x_1, x_2, \ldots, x_T) = 0$, где $T = \left\lceil \frac{(N+2)(s-1)^2 + s^{m+1} - m(s-1)s - s}{m(s-1)^2} \right\rceil$ и параметр m вычисляется по формулам:

$$m = \begin{cases} \left\lfloor \log_s \dfrac{\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor, & \text{если } N < N^*; \\ \left\lfloor \log_s \dfrac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor, & \text{если } N \geq N^*, \end{cases}$$

$$N^* = \frac{\left(\left\lfloor \log_s \dfrac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor (s-1) - s \right) \cdot s^{\left\lfloor \log_s \frac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor} + s}{(s-1)^2} - 2;$$

2) при любых значениях s алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству $S_{N+2}(x_1, x_2, \ldots, x_{N+2}) = 0$.

Доказательство. В случае, когда характеристика поля не равна двум, утверждение теоремы следует из основного результата работы [9].

Будет предполагать далее, что характеристика поля равна двум.

Но, не ограничивая общности, будем далее в тексте использовать как "+" , так и "−" , поскольку это удобно для восприятия хорошо известных формул и соотношений из ранее доказанных утверждений.

Нам понадобятся для доказательства теоремы некоторые свойства стандартного полинома. Согласно [10] имеет место следующее равенство:

$$S_T(x_1, x_2, \ldots, x_T) = \sum_{1 \leq i < j \leq T} (-1)^{i+j-1} [x_i, x_j] S_{T-2}(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_T), \tag{9}$$

где запись $\widehat{x_i}$ означает отсутствие элемента x_i в совокупности $x_1, \ldots, x_T$.

Также согласно [10] имеет место следующее его обобщение:

$$S_T(X) = \sum_{Y \subseteq X} (-1)^\tau S_m(Y) S_{T-m}(X \setminus Y),$$

где τ означает подстановку $(Y, X \backslash Y)$, Y – подмножество в $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_T\}$.

В нашем случае, в частности, с учетом того, что характеристика поля равна двум, справедлива формула

$$S_T(X) = \sum_{Y \subseteq X} S_4(Y) S_{T-4}(X \setminus Y). \tag{10}$$

Заметим также, что при $T = 4$ из равенства (9) следует следующее равенство:

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] + [x_2, x_3] \circ [x_1, x_4] + [x_1, x_3] \circ [x_4, x_2], \tag{11}$$

где $x \circ y = xy + yx$.

Из определения стандартного полинома следует, что он линеен по всем своим переменным и обращается в нуль, если какие-либо два аргумента равны. Поэтому можно считать, что переменные стандартного полинома пробегают набор линейно-независимых элементов алгебры R.

Предположим сначала, что $s < N+2$.

Рассмотрим в алгебре R элемент

$$S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = \sum_{\sigma \in S_T} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(T)}$$

для некоторых $x_1, x_2, , \ \dots \ , x_T \in R$, где T – как в формулировке теоремы.

В работе [9] была доказана следующая лемма:

Лемма 6. [9]. *Если* $s < N+2$, *то для любых* $x_1, x_2, \ \dots \ , x_T \in R$ *выполняется сравнение*

$$S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) \equiv 0 \pmod{R^{N+2}}.$$

Поскольку доказательство леммы не зависело от характеристики поля, то утверждение леммы справедливо и в нашем случае.

Заметим, что если $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, $\dim R^{N+1}/R^{N+2} = 1$, то алгебра R либо нильпотентна индекса $(N+2)$, либо по предложению 1 [6] удовлетворяет перестановочным тождествам $p^\sigma_{N+2}(x_1, \dots, x_{N+2}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{N+2}$, и, поэтому, с учетом леммы 6 [9] алгебра R удовлетворяет и стандартному тождеству $S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = 0$.

Поэтому далее считаем, что $\dim R^N/R^{N+1} = \dim R^{N+1}/R^{N+2} = 2$.

Предположим, что в записи элемента $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T)$ встречается хотя бы один из порождающих c_i, $i = \overline{1, s-2}$.

Тогда по приведенной выше лемме 6 [9] все мономы элемента $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T)$ имеют длину от порождающих a, b, c_i, не меньшую, чем $N+2$. Следовательно, по приведенным выше предложению 1 [9] и следствию из предложения 2 [9], получим с учетом равенства (9), что $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = 0$.

Предположим теперь, что в записи элемента S не встречается ни одного из порождающих c_i, $i = 1, \dots, s$, то есть, в записи элемента S встречаются только порождающие a и b.

Если в записи S кроме a встречается только один порождающий b, то, так как $T \geq 4$, из формулы (11) получим, что

$$S_4(a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, a^{s_4}ba^{s_4}) = [a^{s_1}, a^{s_2}] \circ [a^{s_3}, a^{s_4}ba^{s_4}] + \\ +[a^{s_2}, a^{s_3}] \circ [a^{s_1}, a^{s_4}ba^{s_4}] + [a^{s_1}, a^{s_3}] \circ [a^{s_4}ba^{s_4}, a^{s_2}] = 0,$$

и, поэтому, с учетом (9) получим, что $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = 0$.

Пусть далее в записи S среди порождающих a, b встречается не менее двух порождающих b.

Рассмотрим сначала случаи, когда коэффициент поля β_1 из равенства (4) не равен 1.

Тогда, по предложению 4 [8] и следствию из него, когда $\beta_1 = 0$, доказательство которых не зависело от характеристики основного поля F, в алгебре R выполняется соотношение:

$$\Big[g_1 \cdots g_{r_1}, \ g_{r_1+1} \cdots g_{r_2}\Big] \Big[g_{r_2+1} \cdots g_{r_3}, \ g_{r_3+1} \cdots g_{r_4}\Big] g_{r_4+1} \cdots g_{N+p} = 0,$$

где $p \geq 2,\ 0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \leq N+p$.

Также, по предложению 7 [8], когда $\beta_1 \neq 0; \pm 1$, доказательство которого тоже не зависело от характеристики основного поля F, в алгебре R выполняется соотношение: $g_1 g_2 \cdots g_{N+p} = 0,\ p \geq 2$, при условии, что среди порождающих $g_i \in \{a,\ b\}$ встречается не менее двух порождающих b.

Следовательно, когда $\beta_1 = 0$ или $\beta_1 \neq 0; \pm 1$, по лемме 6 [4] получим, что $S = S_T(x_1, x_2,\ \ldots\ , x_T)\ =\ 0$.

Обратимся теперь к случаю, когда коэффициент поля β_1 из равенства (4) равен 1.

Тогда, по лемме 1 в алгебре R либо выполнены либо соотношения: $a^{N-2}ba = a^{N-1}b$ и $a^{k+1}b = 0$, либо соотношения: $a^{N-2}ba = a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b$ и $a^{k+1}b = 0$.

В первом случае, по лемме 2 с учетом леммы 6 [9] получим, что $S = S_T(x_1, x_2,\ \ldots\ , x_T)\ =\ 0$.

Во втором случае, когда в алгебре R выполняются соотношения $a^{N-2}ba = a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b$ и $a^{k+1}b = 0$, рассмотрим более подробно равенство (10):

$$S = S_T(X) = \sum_{Y \subseteq X} S_4(Y) S_{T-4}(X \setminus Y) =$$
$$= \sum_{\tau \in S_T} S_4\big(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\big) \cdot S_{T-4}\big(x_{\tau(5)}, x_{\tau(6)}, \ldots, x_{\tau(T)}\big),$$

где каждый элемент $x_{\tau(j)},\ j = \overline{1, T}$, имеет следующий вид $a^{i_1}ba^{i_2}b \cdots ba^{i_{m-1}}ba^{i_m}$, при этом, $i_p \geqslant 0,\ p = \overline{1, m},\ m \geqslant 1$ (когда $m = 1,\ x_{\tau(j)} = a^{i_1}$).

Если длина слова $x_{\tau(j)}$, равная $L_j = i_1 + i_2 +\ \ldots\ + i_{m-1} + i_m + 2\ \geq\ N$, то $x_{\tau(j)} = A'_{\tau(j)}a^N + B'_{\tau(j)}a^{N-1}b$ для некоторых $A'_{\tau(j)}, B'_{\tau(j)} \in \langle a \rangle^1$.

Если $L_j = i_1 + i_2 +\ \ldots\ + i_{m-1} + i_m + 2\ <\ N$, то имеет место равенство $a^{N-L_j}x_{\tau(j)} = A_{\tau(j)}a^N + B_{\tau(j)}a^{N-1}b$ для некоторых $A_{\tau(j)}, B_{\tau(j)} \in \langle a \rangle^1$, то есть $a^{N-L_j}\big(x_{\tau(j)} - A_{\tau(j)}a^{L_j} - B_{\tau(j)}a^{L_j-1}b\big) = 0$.

По лемме 6 получим, что

$$\big(x_{\tau(j)} - A_{\tau(j)}a^{L_j} - B_{\tau(j)}a^{L_j-1}b\big) g_1 g_2 \cdots g_{N-L_j+2} =$$
$$= g_1\big(x_{\tau(j)} - A_{\tau(j)}a^{L_j} - B_{\tau(j)}a^{L_j-1}b\big) g_2 \cdots g_{N-L_j+2} =$$
$$=\ \ldots\ =$$
$$= g_1 g_2 \cdots g_{N-L_j+2}\big(x_{\tau(j)} - A_{\tau(j)}a^{L_j} - B_{\tau(j)}a^{L_j-1}b\big) = 0,$$

для некоторых порождающих $g_p \in \{a,\ b\}$.

Таким образом, в любом случае, справедливо следующее равенство:

$$S = \sum_{\tau \in S_T} S_4\big(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\big) \cdot S_{T-4}\big(x_{\tau(5)}, x_{\tau(6)}, \ldots, x_{\tau(T)}\big) =$$
$$= \sum_{\tau \in S_T} S_4\Big(A_{\tau(1)}a^{L_1} + B_{\tau(1)}a^{L_1-1}b,\ A_{\tau(2)}a^{L_2} + B_{\tau(2)}a^{L_2-1}b,\ A_{\tau(3)}a^{L_3} +$$
$$+ B_{\tau(3)}a^{L_3-1}b,\ A_{\tau(4)}a^{L_4} + B_{\tau(4)}a^{L_4-1}b\Big) \cdot S_{T-4}\big(x_{\tau(5)}, x_{\tau(6)}, \ldots, x_{\tau(T)}\big).$$

Учитывая представление элементов $A_{\tau(j)}, B_{\tau(j)} \in \langle a \rangle^1$ в виде $\sum\limits_{p=1}^{k+t-N+1} \alpha_{\tau(j)p}a^{p-1}$ и $\sum\limits_{p=1}^{k-N+2} \beta_{\tau(j)p}a^{p-1},\ \alpha_{\tau(j)p}, \beta_{\tau(j)p} \in F$, получим, что

$$S=\sum_{\tau\in S_T}S_4\Big(\sum_{p_1=1}^{k+t-N+1}\alpha_{\tau(1)p_1}a^{p_1-1}a^{L_1}+\sum_{p_2=1}^{k-N+2}\beta_{\tau(1)p_2}a^{p_2-1}a^{L_1-1}b,$$
$$\sum_{p_3=1}^{k+t-N+1}\alpha_{\tau(2)p_3}a^{p_3-1}a^{L_2}+\sum_{p_4=1}^{k-N+2}\beta_{\tau(2)p_4}a^{p_4-1}a^{L_2-1}b,$$
$$\sum_{p_5=1}^{k+t-N+1}\alpha_{\tau(3)p_5}a^{p_5-1}a^{L_3}+\sum_{p_6=1}^{k-N+2}\beta_{\tau(3)p_6}a^{p_6-1}a^{L_3-1}b,$$
$$\sum_{p_7=1}^{k+t-N+1}\alpha_{\tau(4)p_7}a^{p_7-1}a^{L_4}+\sum_{p_8=1}^{k-N+2}\beta_{\tau(4)p_8}a^{p_8-1}a^{L_4-1}b\Big)\cdot$$
$$S_{T-4}(x_{\tau(5)},x_{\tau(6)},\dots,x_{\tau(T)}).$$

Откуда, используя свойство полилинейности стандартного полинома, очевидно следует, что предыдущее равенство имеет следующий вид:

$$S=\sum_{\tau\in S_T}\sum_{i,m_i,\varepsilon_i}\rho_{m_i}S_4\big(a^{m_1}b^{\varepsilon_1},a^{m_2}b^{\varepsilon_2},a^{m_3}b^{\varepsilon_3},a^{m_4}b^{\varepsilon_4}\big)\cdot S_{T-4}\big(x_{\tau(5)},x_{\tau(6)},\dots,x_{\tau(T)}\big)$$

для некоторых $m_i\geq 0$ $(i=\overline{1,4})$, $\varepsilon_i\in\{0,1\}$, $\rho_{m_i}\in F$.

Поскольку по предложению 1 в алгебре R выполняются следующие соотношения:

$$a^nP(i_1,i_2,i_3;\ m)\ g_1\cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n}=0,$$

где $P(i_1,i_2,i_3;\ m)=\sum\limits_{\sigma\in S_3}(-1)^\sigma a^{\sigma(i_1)}(ba^m)a^{\sigma(i_2)}ba^{\sigma(i_3)}=0$, i_1,i_2,i_3, такие что $0\leq i_1<i_2<i_3$, $m\geq 0$, $n\geq 0$, $i_1+i_2+i_3+m+n\leq M$, $M\geq N$, g_p – произвольные порождающие из $\{a,b,c_i\}$, $i=\overline{1,s-2}$, $p=\overline{1,M-i_1-i_2-i_3-m-n}$, то для окончания доказательства теоремы нам достаточно показать с учетом леммы 6 [4], что элемент $S_1=S_4\big(a^{m_1}b^{\varepsilon_1},a^{m_2}b^{\varepsilon_2},a^{m_3}b^{\varepsilon_3},a^{m_4}b^{\varepsilon_4}\big)$ можно представить в виде суммы слагаемых, каждое из которых имеет вид $a^nP(i_1,i_2,i_3;\ m)\ g_1\cdots g_r$ для некоторых i_1,i_2,i_3,m,n,g_p,r.

Рассмотрим различные варианты.

1) $S_1=S_4(a^{i_1},a^{i_2}b,a^{i_3},a^{i_4}b)$, где $1\leq i_1<i_3$, $\ 0\leq i_2<i_4$.
В этом случае

$$\begin{gathered}S_1=S_4(a^{i_1},a^{i_2}b,a^{i_3},a^{i_4}b)=[a^{i_1},a^{i_2}b]\circ[a^{i_3},a^{i_4}b]+[a^{i_2}b,a^{i_3}]\circ[a^{i_1},a^{i_4}b]+\\+[a^{i_1},a^{i_3}]\circ[a^{i_4}b,a^{i_2}b]=[a^{i_1},a^{i_2}b]\circ[a^{i_3},a^{i_4}b]+[a^{i_2}b,a^{i_3}]\circ[a^{i_1},a^{i_4}b]=\\=a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}a^{i_4}b-a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}-a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_3}a^{i_4}b+a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}+\\+a^{i_3}a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}b-a^{i_3}a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}-a^{i_4}ba^{i_3}a^{i_1}a^{i_2}b+a^{i_4}ba^{i_3}a^{i_2}ba^{i_1}+\\+a^{i_2}ba^{i_3}a^{i_1}a^{i_4}b-a^{i_2}ba^{i_3}a^{i_4}ba^{i_1}-a^{i_3}a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}b+a^{i_3}a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}+\\+a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}-a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}a^{i_2}b-a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}+a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_3}a^{i_2}b.\end{gathered}$$

После очевидных сокращений

$$\begin{gathered}S_1=a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}a^{i_4}b-a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}+a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}+a^{i_3}a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}b-\\-a^{i_3}a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}+a^{i_4}ba^{i_3}a^{i_2}ba^{i_1}-a^{i_2}ba^{i_3}a^{i_4}ba^{i_1}-a^{i_3}a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}b+\\+a^{i_3}a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}+a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}-a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}a^{i_2}b-a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}=\\=a^{i_2}\Big(a^{i_1}ba^{i_3}a^{i_4}b-a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_3}+ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}-ba^{i_3}a^{i_4}ba^{i_1}-a^{i_3}ba^{i_1}a^{i_4}b+a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}\Big)+\\+a^{i_4}\Big(a^{i_3}ba^{i_1}a^{i_2}b-a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1}+ba^{i_3}a^{i_2}ba^{i_1}+a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3}-a^{i_1}ba^{i_3}a^{i_2}b-ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}\Big)=\\=a^{i_2}\Big(a^{i_1}(ba^{i_4})a^{i_3}ba^0-a^{i_1}(ba^{i_4})a^0ba^{i_3}+a^0(ba^{i_4})a^{i_1}ba^{i_3}-\end{gathered}$$

$$-a^0(ba^{i_4})a^{i_3}ba^{i_1} - a^{i_3}(ba^{i_4})a^{i_1}ba^0 + a^{i_3}(ba^{i_4})a^0ba^{i_1}\Big)-$$
$$-a^{i_4}\Big(a^{i_3}(ba^{i_2})a^{i_1}ba^0 - a^{i_3}(ba^{i_2})a^0ba^{i_1} + a^0(ba^{i_2})a^{i_3}ba^{i_1}+$$
$$+a^{i_1}(ba^{i_2})a^0ba^{i_3} - a^{i_1}(ba^{i_2})a^{i_3}ba^0 - a^0(ba^{i_2})a^{i_1}ba^{i_3}\Big) =$$
$$= a^{i_2}P(0,i_1,i_3;\ i_4) - a^{i_4}P(0,i_1,i_3;\ i_2).$$

2) $S_1 = S_4(a^{i_1}, a^{i_2}b, a^{i_3}b, a^{i_4}b)$, где $i_1 \geq 1,\ 0 \leq i_2 < i_3 < i_4$.
В этом случае

$$S_1 = a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}b - a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}b + a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}b-$$
$$-a^{i_1}a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}b + a^{i_1}a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}b - a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}b+$$
$$+a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}b - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}a^{i_3}b + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1}a^{i_4}b-$$
$$-a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1}a^{i_2}b + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}a^{i_3}b - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}b+$$
$$+a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1} - a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1} + a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}-$$
$$-a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1} + a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1} - a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}+$$
$$+a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_3}ba^{i_2}b - a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_3}ba^{i_4}b + a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}b-$$
$$-a^{i_3}ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_2}b + a^{i_3}ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_4}b - a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}b =$$
$$= a^{i_1}\Big(a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2} + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}-$$
$$-a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4} + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2} - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}\Big)b+$$
$$+\Big(a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}b - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}b + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}b-$$
$$-a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}b + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}b - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}\Big)a^{i_1}b-$$
$$-\Big(a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2} + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}-$$
$$-a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4} + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2} - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}\Big)ba^{i_1}-$$
$$-\Big(a^{i_2}(ba^{i_1})a^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}(ba^{i_1})a^{i_3}ba^{i_2} + a^{i_3}(ba^{i_1})a^{i_4}ba^{i_2}-$$
$$-a^{i_2}(ba^{i_1})a^{i_4}ba^{i_3} + a^{i_4}(ba^{i_1})a^{i_2}ba^{i_3} - a^{i_3}(ba^{i_1})a^{i_2}ba^{i_4}\Big)b =$$
$$= a^{i_1}P(i_2,i_3,i_4;\ 0)b + P(i_2,i_3,i_4;\ 0)a^{i_1}b - P(i_2,i_3,i_4;\ 0)ba^{i_1} - P(i_2,i_3,i_4;\ i_1)b.$$

3) $S_1 = S_4(a^{i_1}b, a^{i_2}b, a^{i_3}b, a^{i_4}b)$, где $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4$.
В этом случае

$$S_1 = a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}b - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_4}b + a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_4}b-$$
$$-a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_4}b + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_4}b - a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}b+$$
$$+a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_3}b - a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}b + a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_3}b-$$
$$-a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3}b + a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}b - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_3}b+$$
$$+a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}b - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_2}b + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_2}b-$$
$$-a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}b + a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_2}b - a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_2}b+$$
$$+a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1}b - a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}b + a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}b-$$
$$-a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1 b} + a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1}b - a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}b =$$
$$= \Big(a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3} - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1} + a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_2}-$$
$$-a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_3} + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1} - a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_2}\Big)ba^{i_4}b-$$
$$-\Big(a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1} + a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_2}-$$
$$-a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_4} + a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1} - a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_2}\Big)ba^{i_3}b+$$
$$+\Big(a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1} + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}-$$

$$-a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_3}+a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_3}-a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_4}\Big)ba^{i_2}b-$$
$$-\Big(a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}-a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}+a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}-$$
$$-a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}+a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}-a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}\Big)ba^{i_1}b=$$
$$=P(i_1,i_2,i_3;\ 0)ba^{i_4}b-P(i_1,i_2,i_4;\ 0)ba^{i_3}b+P(i_1,i_3,i_4;\ 0)ba^{i_2}b-$$
$$-P(i_2,i_3,i_4;\ 0)ba^{i_1}b.$$

Доказательство второго утверждения теоремы проводится аналогично, то есть повторяет рассуждения, использованные при доказательстве первого утверждения, поскольку $S=S_{N+2}(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_{N+2})\equiv 0\ (mod\ R^{N+2})$.

Теорема доказана. □

Замечание. Если $m\geq 3$, то для $N=\dfrac{(ms-m-s)\cdot s^m+s}{(s-1)^2}-2+mr$, где $1\leq r<s^m$, найдется такая s-порожденная нильпотентная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2$, которая не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени $(T-1)$.

Доказательство замечания проводится аналогично соответствующему замечанию в работе [9].

References

[1] *The Dniester Notebook (Unsolved problems in the theory of rings and modules)*, V.A. Andrunakievich (ed.), Third edition, Akad. Nauk SSSR, Sib. Otd., Inst. Mat., Novosibirsk, 1982.

[2] S.A. Pikhtil'kov, *On varieties generated by n-dimensional algebras*, Tula Polytechnic Inst., Tula, (1980), Manuscript deposited at VINITI, 1213-80 Dep.

[3] Yu.N. Mal'tsev, *On identities of nilpotent algebras*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., **9** (1986), 68–72. MR882655

[4] I.L. Guseva, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, in: Internat. Conf. on Algebra, dedicated in the memory A.I. Mal'tsev, August 1989, Novosibirsk, p. 43.

[5] Kruse, R.L., Price, D.T., *Nilpotent rings*, New York: Gordon and Breach, 1969. Zbl 0198.36102

[6] E.P. Petrov, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, Algebra i Logika, **30**:5 (1991), 540–556. MR1202508

[7] E.P. Petrov, *Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition* $dimR^2/R^3=2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1052—1066. MR3580049

[8] E.P. Petrov, *Structure, defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition* $dimR^N/R^{N+1}=2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 1153—1187. MR3744051

[9] E.P. Petrov, *Defining relations and identities of finite-generated nilpotent algebra R with condition* $dimR^N/R^{N+1}=2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1048—1064. MR3873769

[10] L. H. Rowen, *Polynomial identities in ring theory*, New York: Academic Press, 1980. MR576061

Evgeniy Petrovich Petrov
Altai State University,
61, Lenina ave.,
Barnaul, 656049, Russia
E-mail address: pep@email.asu.ru