

УДК 530.12, 514.764.22, 514.765.2

© Клепиков П. Н., Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д., 2019

**О ПОЧТИ ЭЙНШТЕЙНОВЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ
(ПСЕВДО)РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ***Клепиков П. Н.^{a,1}, Оскорбин Д. Н.^{a,2}, Родионов Е. Д.^{a,3}^a Алтайский государственный университет, г. Барнаул, 656049, Россия.

Данная статья является небольшим обзором недавних исследований по различным обобщениям теории многообразий Эйнштейна, а также их классификации в случае локально однородных пространств малой размерности.

Ключевые слова: эйнштейново подобные (псевдо)римановы многообразия, солитоны Риччи, конформно плоские многообразия, изотропные тензора Вейля и Схоутена–Вейля, тензор Риччи.

**ON ALMOST EINSTEIN LOCALLY HOMOGENEOUS (PSEUDO)RIEMANNIAN
MANIFOLDS**Klepikov P. N.^{a,1}, Oskorbin D. N.^{a,2}, Rodionov E. D.^{a,3}^a Altai State University, Barnaul, 656049, Russia.

This article is a small review of recent studies on various generalizations of the theory of Einstein manifolds, as well as their classification in the case of locally homogeneous spaces of small dimension.

Keywords: Einstein-like (pseudo)Riemannian manifolds, Ricci solitons, conformally flat manifolds, isotropic Weyl and Schouten–Weyl tensors, Ricci tensor.

PACS: 02.40.Ky

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2019.4.48-65

1. Эйнштейново подобные (псевдо)римановы многообразия

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности n ; X, Y, Z, V — векторные поля на M . Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через

$$R(X, Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X, Y]}Z$$

тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r , оператор Риччи ρ и скалярную кривизну s определим как

$$r(X, Y) = \text{tr}(V \rightarrow R(X, V)Y), \quad g(\rho(X), Y) = r(X, Y), \quad s = \text{tr}(\rho).$$

Группу Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой будем называть метрической группой Ли, а соответствующую алгебру Ли со скалярным произведением — метрической алгеброй Ли.

Определение 1. (Псевдо)риманово многообразие называется многообразием Эйнштейна, если выполнено уравнение

$$r = \Lambda \cdot g,$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18-31-00033 мол_a).

¹E-mail: klepikov.math@gmail.com²E-mail: oskorbin@yandex.ru³E-mail: edr2002@mail.ru

где Λ — некоторая константа.

(Псевдо)римановы многообразия с метриками, обобщающими условия Эйнштейна, исследовались в работах многих математиков (см., обзоры [1–5]). Одними из таких обобщений являются эйнштейново подобные многообразия в смысле А. Грея [1].

Определение 2. Будем говорить, что (псевдо)риманово многообразие (M, g) принадлежит к классу \mathcal{A} , если для любых векторных полей X, Y, Z выполнено

$$\nabla_X r(Y, Z) + \nabla_Y r(Z, X) + \nabla_Z r(X, Y) = 0.$$

Определение 3. Будем говорить, что (псевдо)риманово многообразие (M, g) принадлежит к классу \mathcal{B} , если для любых векторных полей X, Y, Z выполнено

$$\nabla_X r(Y, Z) = \nabla_Y r(X, Z).$$

Определение 4. Будем говорить, что (псевдо)риманово многообразие (M, g) принадлежит к классу \mathcal{C}^\perp , если для любых векторных полей X, Y, Z выполнено

$$\nabla_X r(Y, Z) = \frac{1}{(n+2)(n-1)} \left(n(Xs)g(Y, Z) + \frac{1}{2}(n-2)((Ys)g(X, Z) + (Zs)g(X, Y)) \right).$$

Условие, определяющее класс \mathcal{A} , также известно как условие Киллинга, класс \mathcal{B} — условие Кодацци. Про класс \mathcal{C}^\perp известно следующее: “Данному условию удовлетворяет любое двумерное риманово многообразие, однако мне не известно есть ли в данном классе другие интересные многообразия” (цитата из [1]). В дальнейшем три данных класса многообразий будут обозначаться словосочетанием “эйнштейново подобные”.

Многообразия Эйнштейна и их прямые произведения входят в классы \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C}^\perp . Кроме них класс \mathcal{B} содержит в себе локально симметричные пространства ($\nabla R = 0$), Риччи параллельные многообразия ($\nabla r = 0$) и, в случае постоянной скалярной кривизны, конформно плоские многообразия ($W = 0$, W — тензор Вейля), а также другие классы (псевдо)римановых многообразий (см., например, [2]).

Известные следующие результаты, касающиеся глобальной геометрии римановых многообразий из классов \mathcal{A} и \mathcal{B} (см. [1]).

Теорема 1. Пусть M — риманово многообразие, принадлежащее классу \mathcal{A} , и пусть секционная кривизна M отрицательна. Тогда кривизна Риччи не имеет минимумов и максимумов. В частности, если M компактно, тогда M обязано быть многообразием Эйнштейна.

Теорема 2. Пусть M — риманово многообразие, принадлежащее классу \mathcal{B} , и пусть секционная кривизна M положительна. Тогда кривизна Риччи не имеет минимумов и максимумов. В частности, если M компактно, тогда M обязано быть многообразием Эйнштейна.

В случае однородных многообразий известны некоторые результаты для многообразий малой размерности. Так, например, получены следующие результаты относительно однородных эйнштейново подобных (псевдо)римановых многообразий.

В трехмерном случае классифицированы однородные лоренцевы многообразия с эйнштейново подобными метриками [6]. В частности, в данной работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. Трехмерная связная, односвязная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой принадлежит классу \mathcal{A} тогда и только тогда, когда она является естественно редуktивной.

Теорема 4. Трехмерная связная, односвязная группа Ли G с левоинвариантной лоренцевой метрикой g принадлежит классу \mathcal{B} тогда и только тогда, когда либо (G, g) симметрична, либо ее метрическая алгебра Ли содержится в следующем списке:

1. $[e_1, e_2] = \alpha e_1$, $[e_1, e_3] = -\alpha e_1$, $[e_2, e_3] = \alpha e_2 + \alpha e_3$, $\alpha \neq 0$;
2. $[e_1, e_2] = \pm\sqrt{3}\beta e_2 - \beta e_3$, $[e_1, e_3] = -\beta e_2 \pm \sqrt{3}\beta e_3$, $[e_2, e_3] = -2\beta e_1$, $\beta \neq 0$;
3. $[e_1, e_2] = -\alpha e_1 - \beta e_2 - \beta e_3$, $[e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2 + \beta e_3$, $[e_2, e_3] = \delta e_2 + \delta e_3$, $\alpha\delta(\alpha \pm \delta) \neq 0$.

Трехмерные локально однородные лоренцевы пространства с нетривиальной подгруппой изотропии принадлежат сразу трем классам \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C}^\perp , т.к. они являются локально симметричными [6].

В четырехмерном случае также известен ряд результатов. Например, Воронов Д.С., Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. получили классификацию четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой, принадлежащих классу \mathcal{B} [7–11]. В случае псевдоримановой метрики эйнштейново подобные однородные пространства были классифицированы Дж. Кальварузо, А. Заемом и А. Хаджи-Бадали, П.Н. Клепиковым в работах [12–16].

В качестве примера приведем следующий результат из работы [16].

Теорема 5. Пусть (G, g) — четырехмерная метрическая группа Ли, принадлежащая классу \mathcal{B} , метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в таблице 1 (в данной таблице $\delta_i, \varepsilon_i = \pm 1$).

2. Солитоны Риччи на эйнштейново подобных (псевдо)римановых многообразиях

Другим обобщением многообразий Эйнштейна являются солитоны Риччи, впервые рассмотренные Р. Гамильтоном в работе [17].

Определение 5. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) называется *солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению:

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g,$$

где r — тензор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X .

Если $M = G/H$ — однородное пространство с инвариантной (псевдо)римановой метрикой g , тогда $(G/H, g)$ — *однородный солитон Риччи*. Если кроме того векторное поле X является G -инвариантным, тогда $(G/H, g)$ — *однородный инвариантный солитон Риччи*.

Солитоны Риччи естественным образом связаны с решениями уравнения потока Риччи [17]. Метрика g_0 — метрика солитона Риччи тогда и только тогда, когда $g(t) = \sigma(t) \psi_t^*(g_0)$ — решение уравнения потока Риччи:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2r(g), \quad g(0) = g_0,$$

где $r(g)$ — тензор Риччи метрики g , $\sigma(t)$ — гладкая функция, ψ_t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на многообразии, причем $\sigma(0) = 1$ и $\psi_0 = \text{Id}_M$.

Солитоны Риччи исследованы в работах многих математиков (см., например, обзор [3]). Классификация однородных солитонов Риччи известна только в малых размерностях и не является исчерпывающей (см. [18]).

Определение 6. Солитон Риччи называется *растягивающимся*, если $\Lambda < 0$; *устойчивым*, если $\Lambda = 0$; *стягивающимся*, если $\Lambda > 0$. Также назовем солитон Риччи *тривиальным*, если он изометричен многообразию Эйнштейна или прямому произведению эйнштейново многообразия и (псевдо)евклидова пространства.

Если однородный риманов солитон устойчив, то тензор Риччи тривиален (см. подробнее в [19]) и, по теореме Алексеевского-Кимельфельда, многообразие является плоским (см. [20]). В случае

Таблица 1. Метрические алгебры Ли четырехмерных групп Ли, принадлежащих классу \mathcal{B} , метрика которых не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной

№	Таблица умножения	Метрический тензор
1	$[e_2, e_3] = 3\alpha_1 e_3, [e_2, e_4] = -\frac{\varepsilon_2}{2\alpha_1} e_3 + \alpha_1 e_4, \alpha_1 > 0$	
2	$[e_1, e_2] = \frac{\delta_1 \sqrt{5} + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_2, [e_1, e_3] = \frac{3\varepsilon_1 + \delta_1 \sqrt{5}}{4\alpha_1} e_3, [e_1, e_4] = \alpha_1 e_3 - \frac{\delta_1 \sqrt{5} + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_4, \alpha_1 > 0$	
3	$[e_1, e_4] = (\alpha_1 + \alpha_2)e_1 + \alpha_3 e_2, [e_2, e_4] = -\alpha_3 \varepsilon_1 e_2 e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2,$ $[e_3, e_4] = \frac{2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_3, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 \geq 0, 2\alpha_1^2 \varepsilon_3 + 2\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 1 \neq 0,$ $\alpha_3^2 + (2\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 - \varepsilon_3)^2 \neq 0$	$\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2,$ $\langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3$
4	$[e_1, e_2] = -e_1 + e_2, [e_1, e_3] = e_3, [e_2, e_3] = e_3, [e_2, e_4] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3,$ $[e_3, e_4] = \varepsilon_1 \varepsilon_3 e_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 e_2 + \frac{\alpha_1^2 - 4\alpha_2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + 2\varepsilon_3}{2\alpha_1} e_3, \alpha_1 > 0, \alpha_1^2 - 4\alpha_2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + 2\varepsilon_3 \neq 0$	$\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1,$ $\langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3$
5	$[e_1, e_2] = \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3, [e_1, e_4] = -\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_1} e_3, [e_3, e_4] = \frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_2} e_3, \alpha_1 > 0,$ $\alpha_2 > 0, \alpha_2^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0$	
6	$[e_1, e_4] = \alpha_1 e_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)e_2, [e_2, e_4] = (\alpha_2 - \alpha_3)e_1 + \alpha_1 e_2, [e_3, e_4] = \frac{2\alpha_1^2 - 2\alpha_3^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_3,$ $\alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0, 2\alpha_1^2 \varepsilon_3 - 2\alpha_3^2 \varepsilon_3 + 1 \neq 0, \alpha_2^2 + (2\alpha_1^2 + 2\alpha_3^2 - \varepsilon_3)^2 \neq 0$	$\langle e_1, e_1 \rangle = 1, \langle e_2, e_2 \rangle = -1,$ $\langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3$
7	$[e_1, e_4] = (\alpha_1 + 1)e_1 + (\alpha_2 - 1)e_2, [e_2, e_4] = (\alpha_2 + 1)e_1 + (\alpha_1 - 1)e_2, [e_3, e_4] = \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_3,$ $\alpha_1 \neq 0, 2\alpha_1^2 \varepsilon_3 + 1 \neq 0, 2\alpha_1^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 - \varepsilon_3 \neq 0$	
8	$[e_1, e_4] = (\alpha_1 + \alpha_2)e_1 - \frac{2\alpha_1 \alpha_2 - \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_2 + e_3, [e_3, e_4] = \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_3,$ $[e_2, e_4] = \frac{2\alpha_1 \alpha_2 + \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + e_3, \alpha_1 > 0, \alpha_2 \neq 0, 2\alpha_1^2 + \varepsilon_3 \neq 0$	
9	$[e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{2}}{2} e_1 + \alpha_1 e_2, [e_2, e_4] = -\alpha_1 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e_2, [e_3, e_4] = \alpha_2 e_3, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 > 0$	$\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_1,$ $\langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3$
10	$[e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{6}}{2} e_1 + (\alpha_1 + 1)e_2, [e_2, e_4] = (\alpha_1 - 1)e_1 + \frac{\sqrt{6}}{2} e_2, [e_3, e_4] = \alpha_2 e_3, \alpha_1 \geq 0,$ $\alpha_2 \neq 0$	$\langle e_1, e_1 \rangle = 1, \langle e_2, e_2 \rangle = -1,$ $\langle e_3, e_4 \rangle = -1$
11	$[e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{2}}{2} e_1 + (\alpha_1 + 1)e_2, [e_2, e_4] = (\alpha_1 - 1)e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e_2, [e_3, e_4] = \alpha_2 e_3, \alpha_2 > 0$	$\langle e_1, e_1 \rangle = 1, \langle e_2, e_2 \rangle = -1,$ $\langle e_3, e_4 \rangle = 1$
12	$[e_1, e_3] = -\sqrt{3}\alpha_1 e_3 + \alpha_1 e_4, [e_1, e_4] = \alpha_1 e_3 + \sqrt{3}\alpha_1 e_4, [e_3, e_4] = 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \alpha_1 e_1, \alpha_1 > 0$	$\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2,$ $\langle e_3, e_3 \rangle = 1, \langle e_4, e_4 \rangle = -1$
13	$[e_1, e_2] = \alpha_1 e_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_1\right) e_3, [e_2, e_3] = -\alpha_1 e_1 + (\alpha_1 - \sqrt{2}) e_3, [e_2, e_4] = \alpha_2 e_1,$ $[e_1, e_4] = \left(\alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) e_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_1\right) e_3, [e_3, e_4] = \alpha_1 e_1 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \alpha_1\right) e_3, \alpha_2 \neq 0$	$\langle e_1, e_2 \rangle = -1, \langle e_3, e_4 \rangle = 1$
14	$[e_1, e_2] = \alpha_1 e_1 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (2\alpha_2^2 - \varepsilon_2)}{2\alpha_2} e_3, [e_2, e_3] = \alpha_2 e_1, [e_1, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_1, [e_2, e_4] = \alpha_3 e_1,$ $[e_3, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_3, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 \neq 0$	$\langle e_1, e_2 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2$
15	$[e_1, e_2] = \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_1, [e_2, e_3] = -\frac{2\alpha_1^2 + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_3, [e_1, e_4] = \alpha_1 e_3, [e_2, e_4] = \alpha_2 e_3 + \frac{2\alpha_1^2 - \varepsilon_1}{4\alpha_1} e_4,$ $\alpha_1 \neq 0, \alpha_1 \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha_2 \neq 0, 6\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0$	
16	$[e_1, e_2] = -\frac{\sqrt{6}}{3} e_1, [e_2, e_3] = \frac{2\sqrt{6}}{3} e_3, [e_1, e_4] = \frac{\sqrt{6}}{6} e_3, [e_2, e_4] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3 + \frac{\sqrt{6}}{3} e_4, \alpha_1 >$ $0, \alpha_2 \neq 0$	$\langle e_1, e_2 \rangle = -1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2$

стягивающегося однородного риманова солитона из работ [17, 21] вытекает, что он изометричен произведению компактного однородного эйнштейнова многообразия и евклидова пространства. Если однородный риманов солитон растягивающийся, то M некомпактно (см. [22]). Известные нетривиальные растягивающиеся однородные римановы солитоны Риччи изометричны солвсолитонам.

В общем случае задача изучения, исследования и классификации солитонов Риччи на многообразиях является довольно сложной. Поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на размерность многообразия, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи.

Одним из естественных ограничений является предположение, что рассматриваемое многообразие является однородным пространством и, в частности, группой Ли. В этом направлении известен ряд результатов. Например (см. [4, 23, 24])

Теорема 6. *На локально однородных римановых многообразиях размерности не более четырех, не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи.*

Аналогичный факт известен для унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой

метрикой любой конечной размерности [4]. В связи с этим возникает следующий

Вопрос. Существуют ли нетривиальные однородные инвариантные римановы солитоны Риччи в случае размерности более четырех?

В случае локально однородных псевдоримановых многообразий однородные инвариантные солитоны Риччи существуют уже в малых размерностях. Например, в работе [24] получена

Теорема 7. Пусть (M, g) — четырехмерное локально однородное псевдориманово многообразие с трехмерной подгруппой изотропии, которое является нетривиальным однородным инвариантным солитоном Риччи. Тогда соответствующая пара алгебра Ли группы изометрий/алгебра Ли подгруппы изотропии вместе с инвариантным скалярным произведением содержится в следующем списке:

1. $[v_1, v_2] = -v_2$, $[v_1, v_3] = v_3$, $[v_1, u_2] = u_2$, $[v_1, u_4] = -u_4$, $[v_2, u_2] = u_1$, $[v_2, u_3] = -u_4$,
 $[v_3, u_3] = -u_2$, $[v_3, u_4] = u_1$, $[u_1, u_3] = u_1$, $[u_2, u_3] = pv_3 + u_2$, $[u_3, u_4] = -pv_2 - u_4$,
 $\langle u_1, u_3 \rangle = a$, $\langle u_2, u_4 \rangle = a$, $\langle u_3, u_3 \rangle = b$, $p \neq 0$, $a \neq 0$;
2. $[v_1, v_2] = -v_3$, $[v_1, v_3] = v_2$, $[v_1, u_2] = u_4$, $[v_1, u_4] = -u_2$, $[v_2, u_2] = u_1$, $[v_2, u_3] = -u_2$, $[v_3, u_3] = u_4$,
 $[v_3, u_4] = -u_1$, $[u_1, u_3] = u_1$, $[u_2, u_3] = pv_2 + u_2$, $[u_3, u_4] = pv_3 - u_4$,
 $\langle u_1, u_3 \rangle = a$, $\langle u_2, u_2 \rangle = a$, $\langle u_3, u_3 \rangle = b$, $\langle u_4, u_4 \rangle = a$, $p \neq 0$, $a \neq 0$.

Здесь $\{v_1, v_2, v_3\}$ — базис подалгебры изотропии, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ — базис дополнения.

Другим важным примером являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [25]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [26]).

Определение 7. Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g называется алгебраическим солитоном Риччи, если в соответствующей алгебре Ли выполняется уравнение:

$$\rho = \Lambda \cdot \text{Id} + D, \quad (1)$$

где ρ — оператор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, Id — тождественный оператор, D — оператор дифференцирования алгебры Ли группы G .

Ранее конформно плоские солитоны Риччи на метрических группах Ли изучались в работе [27], где была получена классификация конформно плоских однородных инвариантных солитонов Риччи в четырехмерном случае; в работе [28], в которой получены некоторые результаты о конформно плоских солитонах Риччи в случае римановой метрики, а также в работах [29, 30] при дополнительном условии диагонализруемости оператора Риччи.

Представляется актуальным исследовать пересечение класса эйнштейново подобных многообразий и класса многообразий, которые являются солитонами Риччи, т.к. оба данных класса обобщают условие Эйнштейна. В этом направлении известен следующий результат (см. [31]).

Теорема 8. Пусть (G, g) — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи, принадлежащая к классу \mathcal{B} эйнштейново подобных многообразий. Тогда солитон Риччи обязательно устойчив и оператор Риччи недиагонализруем, имеет единственное собственное значение равное нулю и его жорданова форма имеет блоки размера только 1×1 и 2×2 .

Из данной теоремы в частности следует

Теорема 9. Пусть (G, g) — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой алгебраического солитона Риччи. Если (G, g) принадлежит к классу \mathcal{B} эйнштейново подобных многообразий, то алгебраический солитон Риччи является тривиальным.

При более сильном ограничении, что метрическая группа Ли является конформно плоской, известен следующий результат (см. [31]).

Теорема 10. *Если зафиксировать сигнатуру псевдоримановой метрики, а также действительное число $c_{n-1n}^n \geq 0$ (определяющее ковариантную производную тензора Риччи), то существует не более двух конформно плоских метрических алгебр Ли (с точностью до изометрии), которые являются нетривиальными алгебраическими солитонами Риччи; причем одна из них имеет неотрицательную кривизну Риччи, а вторая — неположительную.*

Заметим, что авторами проводились исследования и не однородных солитонов Риччи с ограничениями на строение лоренцева многообразия. В частности, предполагалось, что лоренцево многообразие является многообразием Уокера или k -симметрическим пространством. В результате чего были доказаны следующие теоремы.

Теорема 11. [32, 33] *Уравнение солитона Риччи локально разрешимо в классе 2-симметрических лоренцевых многообразий размерности 4 и 5 для любой константы Λ .*

Теорема 12. [34] *Пусть (M, g) — четырехмерное конформно плоское лоренцево многообразие Уокера с метрикой плоской волны. Тогда уравнение солитона Риччи локально разрешимо для любой константы Λ .*

Теорема 13. [34] *Пусть (M, g) — трехмерное лоренцево многообразие Уокера. Тогда уравнение солитона Риччи локально разрешимо для любой константы Λ .*

Теорема 14. [35] *Уравнение солитона Риччи локально разрешимо в классе 3-симметрических лоренцевых многообразий размерности $n \geq 2$ для любой константы Λ .*

3. Конформно плоские (псевдо)римановы многообразия

Многомерным обобщением двумерных многообразий с локально изотермической координатной системой являются конформно плоские римановы многообразия — важный подкласс класса римановых многообразий с гармоническим тензором Вейля. Исследованию конформно плоских римановых многообразий посвящены работы многих математиков: Н. Кюйпера, Д.В. Алексеевского и Б.Н. Кимельфельда, Г. Такаги, Е.Д. Родионова и В.В. Славского. Хотя задача описания конформно плоских многообразий в полном объеме и не решена, имеются важные классы римановых пространств, для которых дан исчерпывающий ответ [5, 36–38]. Например, известна классификация конформно плоских однородных римановых многообразий [36, 37].

Теорема 15. *Всякое связное односвязное конформно плоское однородное риманово многообразие гомотетично одному из следующих римановых многообразий:*

- E^n — n -мерное евклидово пространство;
- S^n — n -мерная сфера, у которой при $n \geq 2$ кривизна в любом двумерном направлении равна 1;
- Λ^n — n -мерное пространство Лобачевского, у которого при $n \geq 2$ кривизна в любом двумерном направлении равна -1 ;
- $\Lambda^n \times E^1$;
- $\Lambda^n \times S^m$.

В случае постоянства скалярной кривизны конформно плоские (псевдо)римановы многообразия содержатся в классе \mathfrak{B} эйнштейново подобных многообразий по А. Грейю [1].

Отметим, однако, что задача классификации однородных конформно плоских псевдоримановых многообразий все еще не решена даже для лоренцевых многообразий. Хотя известна следующая [39]

Теорема 16. Пусть M_q^n — n (≥ 3)-мерное конформно плоское однородное псевдориманово многообразие, оператор Риччи которого диагоналируем. Тогда M_q^n локально изометрично одному из следующих многообразий:

- псевдориманова пространственная форма постоянной кривизны;
- произведение m -мерной пространственной формы постоянной кривизны $k \neq 0$ и $(n - m)$ -мерного псевдориманова многообразия постоянной кривизны $-k$, где $2 \leq m \leq n - 2$;
- произведение $(n - 1)$ -мерного псевдориманова многообразия индекса $q - 1$ (соответственно q) постоянной кривизны $k \neq 0$ и одномерного лоренцева (соответственно риманова) многообразия.

В случае же недиагоналируемого оператора Риччи классификация известна лишь в малых размерностях. Например, в работе [12] получена классификация четырехмерных конформно плоских однородных псевдоримановых многообразий. В частности, в данной работе получен следующий результат.

Теорема 17. Пусть (M, g) — четырехмерное конформно плоское локально однородное псевдориманово многообразие с трехмерной подгруппой изотропии, оператор Риччи которого недиагоналируем. Тогда если (M, g) не локально симметрично, то соответствующая ей пара алгебра Ли группы изометрий/алгебра Ли подгруппы изотропии вместе с инвариантным скалярным произведением содержится в следующем списке:

1. $[v_1, v_2] = -v_2$, $[v_1, v_3] = v_3$, $[v_1, u_2] = u_2$, $[v_1, u_4] = -u_4$, $[v_2, u_2] = u_1$, $[v_2, u_3] = -u_4$,
 $[v_3, u_3] = -u_2$, $[v_3, u_4] = u_1$, $[u_1, u_3] = u_1$, $[u_2, u_3] = pv_3 + u_2$, $[u_3, u_4] = -pv_2 - u_4$,
 $\langle u_1, u_3 \rangle = a$, $\langle u_2, u_4 \rangle = a$, $\langle u_3, u_3 \rangle = b$, $p \neq 0$, $a \neq 0$;
2. $[v_1, v_2] = -v_3$, $[v_1, v_3] = v_2$, $[v_1, u_2] = u_4$, $[v_1, u_4] = -u_2$, $[v_2, u_2] = u_1$, $[v_2, u_3] = -u_2$, $[v_3, u_3] = u_4$,
 $[v_3, u_4] = -u_1$, $[u_1, u_3] = u_1$, $[u_2, u_3] = pv_2 + u_2$, $[u_3, u_4] = pv_3 - u_4$,
 $\langle u_1, u_3 \rangle = a$, $\langle u_2, u_2 \rangle = a$, $\langle u_3, u_3 \rangle = b$, $\langle u_4, u_4 \rangle = a$, $p \neq 0$, $a \neq 0$.

Здесь $\{v_1, v_2, v_3\}$ — базис подалгебры изотропии, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ — базис дополнения.

В случае не локально однородных многообразий ситуация представляется более сложной, хотя известен ряд результатов о строении и свойствах конформно плоских римановых многообразий. Известны результаты, которые связывают конформно плоские метрики ограниченной кривизны с геометрией лоренцева пространства и пространства Лобачевского. Эта связь следует из того, что группа мёбиусовых преобразований изоморфна группе Лоренца преобразований псевдоевклидова пространства Минковского, а также из того факта, что имеется непосредственное погружение конформно плоской метрики в изотропный конус пространства Минковского (см. подробнее, [5]). Используя данную конструкцию, а также конкретные геометрические построения, авторам удалось доказать серию теорем. Приведем сначала необходимые определения и факты.

Выражение вида $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$, где $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ — положительная функция, определяет конформно плоскую метрику в \mathbb{R}^n с одномерной кривизной в направлении единичного вектора ξ равной

$$K(f, x, \xi) = f(x) \frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2} |\nabla f(x)|^2.$$

При $n \neq 2$ конформно плоская метрика имеет постоянную одномерную кривизну, если и только если функция $f(x)$ имеет вид квадратичного полинома $f(x) = a\|x\|^2 + \sqrt{2}(x, \mathbf{b}) + c$, при этом одномерная кривизна вычисляется по формуле $K = -\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$, где $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{b}\|^2 - 2ac$ есть скалярный квадрат вектора $\mathbf{w} = [\mathbf{b}, a, c] \in M^{n+2}$ в псевдоевклидовом пространстве M^{n+2} , снабженном скалярным произведением $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) - a_1 c_2 - a_2 c_1$.

Рассмотрим множество

$$H_k = \left\{ \mathbf{w} = [\mathbf{b}, a, c] \in M^{n+2} : \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = -\frac{1}{k}, a > 0, c > 0 \right\},$$

тогда H_k — положительная половина двуполостного гиперboloида (вместе с индуцированной метрикой из M^{n+2} это пространство Лобачевского кривизны $(-k)$).

Сопоставим произвольной конформно плоской метрике $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ отображение

$$P_f(x, k) = \frac{1}{2f} \left[\frac{2f\nabla f - x\|\nabla f\|^2}{k} - x, \frac{\|\nabla f\|^2 + 1}{k\sqrt{2}}, \frac{(2f\nabla f - x\|\nabla f\|^2)^2}{k\|\nabla f\|^2\sqrt{2}} + \frac{\|x\|^2}{\sqrt{2}} \right] \in H_k,$$

где $k > 0$ — фиксированная константа.

Пусть $f \in C^{1,1}(\overline{\mathbb{R}^n})$, $f(x) > 0$ и $|K(f, x, \xi)| \leq \frac{k}{2}$, тогда n -мерная поверхность $P(f) = \{P_f(x, k) : x \in \mathbb{R}^n\}$ — компактная, без точек на абсолюте, выпуклая замкнутая поверхность в пространстве Лобачевского. И обратно, по компактной выпуклой поверхности $P(f) \subset H_k$ можно восстановить соответствующую конформно плоскую метрику ограниченной кривизны. Обозначим через $P^c(f) \subset H_k$ выпуклое подмножество, ограниченное поверхностью $P(f)$. Распространяя указанное соответствие между выпуклыми множествами и функциями на произвольные замкнутые выпуклые подмножества H_k (не обязательно ограниченные), получим со ответствующий класс функций $BK(\overline{\mathbb{R}^n}, k)$.

Теорема 18. [40] Пусть имеются две конформно плоские метрики ограниченной одномерной кривизны $f_1, f_2 \in BK(\overline{\mathbb{R}^n}, k)$. Тогда

$$f_1(x) \leq f_2(x), \forall x \in \overline{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow P^c(f_1) \supseteq P^c(f_2).$$

Теорема 18. [41] Пусть дана последовательность $ds_n^2 = \frac{dx^2}{f_n^2(x)}$ конформно плоских метрик в \mathbb{R}^n таких, что $f_n > 0$, $f_n \in C^2$ и одномерная кривизна метрик ds_n^2 равномерно ограничена сверху и снизу. Тогда если f_n поточечно сходится к функции f , то $f \in C^{1,1}$ в области где она положительна, т.е. f дифференцируема и её производные являются локально липшицевыми.

Теорема 19. [42] Пусть (M^n, g) — конформно плоское риманово многообразие, т.е. $W = 0$. Рассмотрим ортобазис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, в котором диагонализиремы операторы Риччи и одномерной кривизны. Тогда в базисе $\{e_i \wedge e_j\}_{i < j}$ диагонализиреуем оператор кривизны $\mathcal{R} : \Lambda^2 M^n \rightarrow \Lambda^2 M^n$, причем спектр оператора \mathcal{R} есть $\{K_{ij}\}_{i < j}$, где $K_{ij} = K_\sigma(e_i \wedge e_j)$.

Теорема 20. [40] Конформно плоская метрика ds^2 в \mathbb{R}^n имеет неотрицательную одномерную кривизну в только и только том случае, когда она имеет вид $ds^2 = \frac{dx^2}{g^4(x)}$, где положительная функция $g(x)$ удовлетворяет трехточечному свойству

$$g(x) \leq g(x_1) \frac{|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + g(x_2) \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|}$$

для любых трех точек x, x_1, x_2 из \mathbb{R}^n таких, что точка x принадлежит дуге $[x_1, x_2]$ окружности, проходящей через три точки x, x_1, x_2 . Здесь $|b - a|$ — обычное расстояние между точками a, b в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n .

Теорема 21. [43] Если конформно плоская метрика $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ на сфере \mathbb{S}^n имеет положительную одномерную кривизну, тогда $H_f : x \rightarrow x - 2f(x) \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$ является диффеоморфизмом на \mathbb{S}^n и полярная конформно плоская метрика $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$ (где $f^*(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f|^2}$) также имеет положительную одномерную кривизну.

4. Псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Вейля

Кроме конформно плоских многообразий можно рассматривать многообразия, тензор Вейля которых имеет нулевой квадрат длины, а сам он не является нулевым. В этом случае такие многообразия называют многообразиями с изотропным тензором Вейля. Данные пространства тесно связаны с локально конформно однородными пространствами [5]. В данной работе изучаются конформно киллинговы векторные поля, приводятся условия интегрируемости соответствующей системы дифференциальных уравнений и, в частности, доказывается

Теорема 22. Пусть (M, g) — локально конформно однородное связное пространство, и пусть хотя бы в одной точке имеем $\|W\|^2 \neq 0$ ($\|SW\|^2 \neq 0$ при $\dim M = 3$). Тогда (M, g) конформно эквивалентно локально однородному пространству.

В случае $\|W\|^2 = 0$ ($\|SW\|^2 = 0$ при $\dim M = 3$) подобную конформную деформацию построить не удалось, таким образом возникает задача об изучении (псевдо)римановых локально однородных и локально конформно однородных многообразий, тензор Вейля которых имеет нулевой квадрат длины, а сам не равен нулю.

Определение 8. Тензор Вейля W будем называть *изотропным*, если квадрат его длины равен нулю ($\|W\|^2 = 0$), а сам тензор не равен нулю ($W \neq 0$).

Отметим, что в случае римановой метрики квадрат длины тензора в некотором ортонормированном базисе представляет собой сумму квадратов всех компонент, и равен нулю тогда и только тогда, когда сам тензор тривиален. Поэтому естественно рассматривать лишь случай псевдоримановой метрики. В трехмерном случае тензор Вейля тривиален, роль его аналога играет тензор Схоутена-Вейля (тензор Коттона). В [44, 45] исследовался тензор Схоутена-Вейля для левоинвариантной лоренцевой метрики на группах Ли размерности 3, что является продолжением исследований Дж. Милнора [46] по левоинвариантным римановым метрикам на трехмерных группах Ли.

При достаточно малой размерности локально однородного (псевдо)риманова пространства становится возможным применение систем компьютерной математики для изучения локально однородных (псевдо)римановых многообразий с изотропным тензором Вейля. Например, с помощью классификации четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий (см. например [47]) можно доказать следующую теорему (см. [48], где содержится частичная классификация).

Теорема 23. Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда $(M = G/H, g)$ имеет изотропный тензор Вейля тогда и только тогда, когда алгебра Ли группы G содержится в таблицах 2–4 (вид инвариантного метрического тензора приведен в таблице 5).

Отметим, что подобную классификацию можно получить и для условия $\|SW\|^2 = 0$.

Приведенный список литературы тесным образом связан с конкретной проблематикой нашего рассмотрения и никоим образом не претендует на полноту. Многие близкие вопросы также не были затронуты, поскольку беглое упоминание серии смежных по тематике работ было бы, на наш взгляд, слишком поверхностным и не вполне оправданным.

Авторы благодарны своим коллегам Клепиковой С.В., Славскому В.В., Хромовой О.П. и Эрнсту И.В. — соавторам приведенных статей и результатов данной работы.

Таблица 2. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля

№	Скобки Ли	№ g	Ограничения
1.1 ^{1.1}	$[e_1, u_1] = u_1, [e_1, u_3] = -u_3, [u_1, u_3] = u_2, [u_2, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = u_3$	1	$\alpha_{22} = \frac{\alpha_{13}^2(13 \pm 3\sqrt{17}) + 8\alpha_{24}^2}{8\alpha_{44}}$
1.1 ^{2.1}	$[e_1, u_1] = u_3, [e_1, u_3] = -u_1, [u_1, u_3] = -u_2, [u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_4] = 2u_2, [u_3, u_4] = u_3$	3	$\alpha_{22} = \frac{2\alpha_{24}^2 - \alpha_{33}^2(13 \pm 3\sqrt{17})}{2\alpha_{44}} \neq 0$
1.3 ^{1.1}	$[e_1, u_1] = e_1, [e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_2] = -\frac{1}{2}u_2, [u_1, u_3] = u_3, [u_1, u_4] = \frac{1}{2}u_4, [u_2, u_3] = \frac{1}{2}u_4$	5	$\alpha_{44} = 0, \alpha_{33}^2 + \alpha_{34}^2 \neq 0$
1.3 ^{1.2}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = -\lambda e_1 + (\lambda + 1)u_1 + \lambda u_2, [u_2, u_4] = u_2, \lambda \in [-1, 1]$	5	$\alpha_{44} \neq 0, \lambda \neq 0$
1.3 ^{1.3}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = u_1, [u_2, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = e_1$	5	—
1.3 ^{1.4}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = -(1 + \lambda^2)e_1 + 2\lambda u_1 + (1 + \lambda^2)u_2, [u_2, u_4] = u_2, \lambda \geq 0$	5	$\alpha_{44} \neq 0$
1.3 ^{1.5}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = -\frac{\lambda^2 + \mu}{\mu - 1}e_1 + \frac{1 + \lambda^2}{\mu - 1}u_2, [u_1, u_4] = -\lambda e_1 + u_1 + \lambda u_2, [u_2, u_3] = -\lambda e_1 + u_1 + \lambda u_2, [u_2, u_4] = -\mu e_1 + (\mu + 1)u_2, \lambda \geq 0, \mu \neq 1$	5	$(\mu - 1)(2\lambda\alpha_{34} - \mu\alpha_{33}) \neq \alpha_{44}(\lambda^2 + \mu)$
1.3 ^{1.6}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = -u_2, [u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = u_1, [u_2, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = e_1$	5	—
1.3 ^{1.7}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = \frac{\lambda}{1 + \lambda}e_1 + \frac{\lambda}{1 + \lambda}u_1 - \frac{1}{1 + \lambda}u_2, [u_1, u_4] = -\frac{1}{1 + \lambda}e_1 + \frac{1}{1 + \lambda}u_1 + \frac{1}{1 + \lambda}u_2, [u_2, u_3] = -\frac{1}{1 + \lambda}e_1 + \frac{1}{1 + \lambda}u_1 + \frac{1}{1 + \lambda}u_2, [u_2, u_4] = -\frac{\lambda}{1 + \lambda}e_1 + \frac{\lambda}{1 + \lambda}u_1 + \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda}u_2, \lambda \neq -1$	5	$\alpha_{44} \neq \lambda\alpha_{33} - 2\alpha_{34}$
1.3 ^{1.8}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_2, u_3] = u_1, [u_2, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = -u_3$	5	$\alpha_{33} \neq 0$
1.3 ^{1.9}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_2, u_3] = \lambda u_1, [u_2, u_4] = -\lambda e_1 + (\lambda + 1)u_2, [u_3, u_4] = -\lambda u_3$	5	$\alpha_{33} \neq 0, \lambda \neq -1, \lambda \neq 0$
1.3 ^{1.10}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_2, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = e_1$	5	—
1.3 ^{1.11}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_2, u_3] = -u_1, [u_2, u_4] = e_1, [u_3, u_4] = e_1 + u_3$	5	—
1.3 ^{1.12}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = \mu u_1, [u_2, u_4] = -\lambda \mu e_1 + (\lambda + \mu)u_2, [u_3, u_4] = (1 - \mu)u_3$	5	$\alpha_{33} \neq 0, \mu \neq \frac{1}{2}, \mu \neq -(\lambda + 1)$
1.3 ^{1.13}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = \frac{1}{2}u_1, [u_2, u_4] = -\frac{\lambda}{2}e_1 + (\lambda + \frac{1}{2})u_2, [u_3, u_4] = e_1 + \frac{1}{2}u_3$	5	—
1.3 ^{1.14}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = (1 - \lambda)u_1, [u_2, u_4] = \lambda(\lambda - 1)e_1 + u_2, [u_3, u_4] = e_1 + \lambda u_3, \lambda \neq \frac{1}{2}$	5	—
1.3 ^{1.15}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = -e_1 + 2u_1, [u_1, u_4] = u_2, [u_2, u_3] = u_2, [u_2, u_4] = -e_1 + u_1$	5	$\alpha_{33} \neq -\alpha_{44}$
1.3 ^{1.16}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = -e_1 + 2u_1, [u_1, u_4] = u_2, [u_2, u_3] = u_2, [u_2, u_4] = e_1 - u_1$	5	$\alpha_{33} \neq \alpha_{44}$
1.3 ^{1.17}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_2, u_4] = u_1, [u_3, u_4] = e_1$	5	—
1.3 ^{1.19}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = u_1, [u_2, u_4] = -e_1 + u_1 + 2u_2$	5	$\alpha_{33} \neq 0$
1.3 ^{1.20}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_2, u_3] = u_1, [u_2, u_4] = u_2 - u_1, [u_3, u_4] = -u_3$	5	$\alpha_{33} \neq 0$
1.3 ^{1.21}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = \lambda u_1, [u_2, u_4] = -\lambda e_1 + (1 - \lambda)u_1 + (1 + \lambda)u_2, [u_3, u_4] = (1 - \lambda)u_3, \lambda \neq 1$	5	$\alpha_{33} \neq 0, \lambda \neq 0, \lambda \neq \frac{1}{2}$
1.3 ^{1.22}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = \frac{1}{2}u_1, [u_2, u_4] = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2, [u_3, u_4] = e_1 + \frac{1}{2}u_3$	5	—
1.3 ^{1.23}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_4] = u_1 + u_2, [u_3, u_4] = e_1 + u_3$	5	—
1.3 ^{1.24}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = (1 - 2\lambda)e_1 + 2\lambda u_1, [u_1, u_4] = (2\lambda - 1)u_2, [u_2, u_3] = \lambda u_2, [u_2, u_4] = \frac{2\lambda - 1}{2\lambda - 2}e_1 - \frac{1}{2\lambda - 2}u_1, [u_3, u_4] = (\lambda - 1)u_4, \lambda \neq 1$	5	$\lambda \neq \frac{2}{3}, \alpha_{33} \neq 2\lambda\alpha_{44}(\lambda - 1)$
1.3 ^{1.25}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = (1 - 2\lambda)e_1 + 2\lambda u_1, [u_1, u_4] = (2\lambda - 1)u_2, [u_2, u_3] = \lambda u_2, [u_2, u_4] = \frac{1 - 2\lambda}{2\lambda - 2}e_1 + \frac{1}{2\lambda - 2}u_1, [u_3, u_4] = (\lambda - 1)u_4, \lambda \neq 1$	5	$\lambda \neq \frac{2}{3}, \alpha_{33} \neq 2\lambda\alpha_{44}(1 - \lambda)$
1.3 ^{1.26}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{4}{3}u_1, [u_1, u_4] = \frac{1}{3}u_2, [u_2, u_3] = \frac{2}{3}u_2, [u_2, u_4] = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{3}{2}u_1, [u_3, u_4] = e_1 - \frac{1}{3}u_4$	5	—
1.3 ^{1.27}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{4}{3}u_1, [u_1, u_4] = \frac{1}{3}u_2, [u_2, u_3] = \frac{2}{3}u_2, [u_2, u_4] = \frac{1}{2}e_1 - \frac{3}{2}u_1, [u_3, u_4] = e_1 - \frac{1}{3}u_4$	5	—
1.3 ^{1.28}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = 2u_1, [u_1, u_4] = 2u_2, [u_2, u_3] = u_2, [u_2, u_4] = e_1 - \frac{1}{2}u_1, [u_3, u_4] = u_4$	5	$\alpha_{33} \neq 2\alpha_{44}$
1.3 ^{1.29}	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = 2u_1, [u_1, u_4] = 2u_2, [u_2, u_3] = u_2, [u_2, u_4] = -e_1 + \frac{1}{2}u_1, [u_3, u_4] = u_4$	5	$\alpha_{33} \neq -2\alpha_{44}$

Таблица 3. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля. Продолжение

№	Скобки Ли	№ g	Ограничения
1.3 ¹ .30	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = \frac{\lambda\mu(\lambda-1)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1 + \frac{\lambda^2+\mu-\lambda^2\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1 + \frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2,$ $[u_1, u_4] = -\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1 + \frac{\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2,$ $[u_2, u_3] = -\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1 + \frac{\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2,$ $[u_2, u_4] = \frac{\lambda\mu(\mu-1)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1 + \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1 + \frac{\lambda+\mu^2-\mu^2\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2, \lambda + \mu - \lambda\mu \neq 0, 1 \leq \mu \leq \lambda,$ $\lambda\mu > 0$	5	$\alpha_{34} \neq \frac{\alpha_{33}(1-\mu)+\alpha_{44}(1-\lambda)}{2}$
1.3 ¹ .31	$[e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = e_1$	5	—
1.4 ¹ .1	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [e_1, u_4] = e_1, [u_1, u_2] = u_1, [u_1, u_3] = u_2, [u_1, u_4] = u_1,$ $[u_2, u_3] = u_3, [u_3, u_4] = -u_3$	6	$\alpha_{33} \neq 0$
1.4 ¹ .2	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [e_1, u_4] = e_1, [u_1, u_4] = pu_1, [u_2, u_4] = (p-1)u_2,$ $[u_3, u_4] = (p-2)u_3$	6	$\alpha_{33} \neq 0, p \neq 3$
1.4 ¹ .3	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [e_1, u_4] = e_1, [u_1, u_4] = 2u_1, [u_2, u_3] = e_1, [u_2, u_4] = u_2$	6	$\alpha_{33} \neq \alpha_{44}$
1.4 ¹ .4	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [e_1, u_4] = e_1, [u_1, u_4] = 2u_1, [u_2, u_3] = -e_1, [u_2, u_4] = u_2$	6	$\alpha_{33} \neq -\alpha_{44}$
1.4 ¹ .5	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_1, u_2] = u_1, [u_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = u_3$	6	$\alpha_{33} \neq 0$
1.4 ¹ .6	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = u_1 + u_3$	6	—
1.4 ¹ .7	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = -u_1 + u_3$	6	—
1.4 ¹ .9	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_1, u_3] = u_1, [u_2, u_3] = re_1 + u_2 + u_4, [u_3, u_4] = pu_4$	6	$\alpha_{44} \neq 0,$ $\alpha_{22}(p(p+1) - r) \neq 0$
1.4 ¹ .10	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_1, u_3] = u_1, [u_2, u_3] = re_1 + u_2, [u_3, u_4] = pu_4$	6	$r \neq p(p+1)$
1.4 ¹ .11	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_1, u_3] = u_1, [u_2, u_3] = re_1 + u_2 + u_4, [u_3, u_4] = u_1 - u_4$	6	—
1.4 ¹ .12	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_1, u_3] = u_1, [u_2, u_3] = re_1 + u_2, [u_3, u_4] = u_1 - u_4$	6	$r \neq 0$
1.4 ¹ .13	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = re_1 + u_4, [u_3, u_4] = u_4$	6	—
1.4 ¹ .14	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = re_1, [u_3, u_4] = u_4$	6	$r \neq 1$
1.4 ¹ .15	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = e_1 + u_4, [u_3, u_4] = u_1$	6	$\alpha_{22} \neq -\alpha_{44}$
1.4 ¹ .16	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = -e_1 + u_4, [u_3, u_4] = u_1$	6	$\alpha_{22} \neq \alpha_{44}$
1.4 ¹ .17	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = u_4, [u_3, u_4] = u_1$	6	—
1.4 ¹ .18	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = e_1 + u_4$	6	$\alpha_{22} \neq -\alpha_{44}$
1.4 ¹ .19	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = -e_1 + u_4$	6	$\alpha_{22} \neq \alpha_{44}$
1.4 ¹ .20	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = u_4$	6	—
1.4 ¹ .21	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = e_1, [u_3, u_4] = u_1$	6	—
1.4 ¹ .22	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = -e_1, [u_3, u_4] = u_1$	6	—
1.4 ¹ .24	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = e_1$	6	—
1.4 ¹ .25	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = -e_1$	6	—
2.2 ¹ .4	$[e_1, u_1] = u_1, [e_1, u_2] = u_2, [e_1, u_3] = -u_3, [e_1, u_4] = -u_4, [e_2, u_2] = u_1,$ $[e_2, u_3] = -u_4, [u_1, u_3] = e_2, [u_2, u_3] = e_1, [u_2, u_4] = e_2$	10	$\alpha_{23} \neq 0$
2.2 ¹ .5	$[e_1, u_1] = u_1, [e_1, u_2] = u_2, [e_1, u_3] = -u_3, [e_1, u_4] = -u_4, [e_2, u_2] = u_1,$ $[e_2, u_3] = -u_4, [u_2, u_3] = e_2$	10	—
2.2 ² .1	$[e_1, u_1] = u_2, [e_1, u_2] = -u_1, [e_1, u_3] = u_4, [e_1, u_4] = -u_3, [e_2, u_3] = u_1,$ $[e_2, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = e_2, [u_2, u_4] = e_2, [u_3, u_4] = -e_1$	11	$\alpha_{44} \neq 0$
2.2 ² .2	$[e_1, u_1] = u_2, [e_1, u_2] = -u_1, [e_1, u_3] = u_4, [e_1, u_4] = -u_3, [e_2, u_3] = u_1,$ $[e_2, u_4] = u_2, [u_1, u_3] = -e_2, [u_2, u_4] = -e_2, [u_3, u_4] = e_1$	11	$\alpha_{44} \neq 0$
2.2 ² .3	$[e_1, u_1] = u_2, [e_1, u_2] = -u_1, [e_1, u_3] = u_4, [e_1, u_4] = -u_3, [e_2, u_3] = u_1,$ $[e_2, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = e_2$	11	—
2.5 ¹ .1	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_4, [e_1, u_4] = -2e_1, [e_2, u_2] = -2e_2, [e_2, u_3] = -u_2,$ $[e_2, u_4] = u_1, [u_1, u_2] = 2e_2 - u_1, [u_1, u_3] = u_2 + u_4, [u_1, u_4] = 2e_1 - u_1,$ $[u_2, u_3] = -2u_3, [u_2, u_4] = u_2 - u_4, [u_3, u_4] = 2u_3$	12	$\alpha_{33} \neq 0$
2.5 ¹ .2	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_4, [e_2, u_2] = -2e_2, [e_2, u_3] = -u_2, [e_2, u_4] = u_1,$ $[u_1, u_2] = -u_1, [u_1, u_3] = u_4, [u_2, u_3] = -2u_3, [u_2, u_4] = -u_4$	12	$\alpha_{33} \neq 0$
2.5 ¹ .3	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_4, [e_2, u_3] = -u_2, [e_2, u_4] = u_1, [u_1, u_3] = u_1,$ $[u_2, u_3] = e_1 + pe_2 + (1-q)u_2, [u_2, u_4] = qu_1,$ $[u_3, u_4] = -(p+q)e_1 + \lambda e_2 - (1+q)u_4, q \geq 0$ (if $\lambda \neq 0$), $q \in \mathbb{R}$ (if $\lambda = 0$)	12	—
2.5 ¹ .5	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_4, [e_2, u_3] = -u_2, [e_2, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = e_1 + qe_2 - u_2,$ $[u_2, u_4] = u_1, [u_3, u_4] = -qe_1 - \lambda e_2 - u_4$	12	—
2.5 ¹ .7	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_4, [e_2, u_3] = -u_2, [e_2, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = e_1 + e_2,$ $[u_3, u_4] = -e_1 + \lambda e_2$	12	—
2.5 ¹ .8	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_4, [e_2, u_3] = -u_2, [e_2, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = e_1 - e_2,$ $[u_3, u_4] = e_1 + \lambda e_2$	12	—
2.5 ¹ .11	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_4, [e_2, u_3] = -u_2, [e_2, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = e_1,$ $[u_3, u_4] = e_2$	12	—

Таблица 4. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля. Продолжение

№	Скобки Ли	№ g	Ограничения
2.5 ¹ .12	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_4, [e_2, u_3] = -u_2, [e_2, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = e_1, [u_3, u_4] = -e_2$	12	—
2.5 ¹ .13	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_4, [e_2, u_3] = -u_2, [e_2, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = e_1$	12	—
2.5 ² .1	$[e_1, u_2] = -e_1 + u_1, [e_1, u_3] = -u_2, [e_1, u_4] = e_2, [e_2, u_2] = -e_2, [e_2, u_3] = u_4,$ $[e_2, u_4] = -e_1 - u_1, [u_1, u_2] = e_1 - u_1, [u_1, u_3] = u_2, [u_1, u_4] = -e_2, [u_2, u_3] = -2u_3,$ $[u_2, u_4] = -u_4$	6	$\alpha_{33} \neq 0$
2.5 ² .2	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_2, [e_2, u_3] = u_4, [e_2, u_4] = -u_1, [u_1, u_3] = u_1,$ $[u_2, u_3] = (p + s)e_1 + re_2 + u_2 - 2ru_4, [u_2, u_4] = 2ru_1, [u_3, u_4] = -re_1 + (p - s)e_2 - 2ru_2 - u_4,$ $r \geq 0, s \geq 0$	13	$s \neq 0$
2.5 ² .3	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_2, [e_2, u_3] = u_4, [e_2, u_4] = -u_1, [u_2, u_3] = -(r + s)e_1 - u_4,$ $[u_2, u_4] = u_1, [u_3, u_4] = (s - r)e_2 - u_2, s \geq 0$	13	$s \neq 0$
2.5 ² .4	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_2, [e_2, u_3] = u_4, [e_2, u_4] = -u_1, [u_2, u_3] = (1 + s)e_1,$ $[u_3, u_4] = (1 - s)e_2, s \geq 0$	13	$s \neq 0$
2.5 ² .5	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_2, [e_2, u_3] = u_4, [e_2, u_4] = -u_1, [u_2, u_3] = -(1 + s)e_1,$ $[u_3, u_4] = (s - 1)e_2, s \geq 0$	13	$s \neq 0$
2.5 ² .6	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_2, [e_2, u_3] = u_4, [e_2, u_4] = -u_1, [u_2, u_3] = e_2, [u_3, u_4] = e_1$	13	—
3.2 ¹ .3	$[e_1, e_3] = 2e_3, [e_1, u_1] = u_1, [e_1, u_2] = u_2, [e_1, u_3] = -u_3, [e_1, u_4] = -u_4, [e_2, u_2] = u_1,$ $[e_2, u_3] = -u_4, [e_3, u_3] = -u_2, [e_3, u_4] = u_1, [u_2, u_3] = e_2$	14	—
4.3 ¹ .1	$[e_1, e_2] = 2e_2, [e_1, e_3] = -2e_3, [e_1, u_1] = u_1, [e_1, u_2] = -u_2, [e_1, u_3] = -u_3, [e_1, u_4] = u_4,$ $[e_2, e_3] = e_1, [e_2, u_2] = u_1, [e_2, u_3] = -u_4, [e_3, u_1] = u_2, [e_3, u_4] = -u_3, [e_4, u_3] = -u_2,$ $[e_4, u_4] = u_1, [u_3, u_4] = e_4$	14	—

Таблица 5. Вид инвариантного метрического тензора

№	Матрица метрического тензора	Ограничения	№	Матрица метрического тензора	Ограничения
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0,$ $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0,$ $\alpha_{24} \neq 0$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
3	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0,$ $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	11	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{44} & 0 \\ -\alpha_{23} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$
4	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$	12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$	13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{44} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{22} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$	14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$	15	$\begin{pmatrix} \alpha_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{24} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2 \neq 0$			

Список литературы

1. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein // *Geom. Dedicata*. 1978. V. 7. P. 259–280.
2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: В 2 т. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
3. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons // *Advanced Lectures in Mathematics*. 2010. Vol. 11. P. 1–38.
4. Cerbo F.L. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // *Adv. Geom.* 2014. Vol. 14, № 2. P. 225–237.
5. Balaschenko V.V., Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Homogeneous manifolds: theory and applications: the monography. Khanty-Mansiisk: Poligraphist, 2008.
6. Calvaruso G. Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds // *Geom. Dedicata*. 2007. V. 127. P. 99–119.
7. Gladunova O.P., Slavskii V.V. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // *ДАН*. 2010. Т. 431, № 6. С. 736–768.
8. Воронов Д.С., Родионов Е.Д. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // *ДАН*. 2010. Т. 432, № 3. С. 301–303.
9. Gladunova O.P., Slavskii V.V. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // *Мат. труды*. 2011. Т. 14, № 1. С. 50–69.

10. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных разложимых группах Ли // Известия АлтГУ. 2014. № 1/1(81). С. 122–126.
11. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных неразложимых группах Ли // Известия АлтГУ. 2014. № 1/2(81). С. 62–73.
12. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds // Tokohu Math. J. 2014. Vol. 66. P. 31–54.
13. Calvaruso G., Zaeim A. Four-dimensional Loretzian Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. 2013. Vol. 31. P. 496–509.
14. Calvaruso G., Zaeim A. Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groups // Journal of Lie Theory. 2015. Vol. 25. P. 1023–1044.
15. Zaeim A., Haji-Badali A. Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four // Mediter. J. Math. 2016. Vol. 13(5). P.3455–3468.
16. Клепиков П.Н. Левоинвариантные псевдоримановы метрики на четырехмерных группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля // Известия высших учебных заведений. Математика. 2017. № 8. С. 92–97.
17. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. 1988. Vol. 71. P. 237–261.
18. Arroyo R.M., Lafuente R. Homogeneous Ricci solitons in low dimensions // Int Math Res Notices. 2015. Vol. 2015, № 13. P. 4901–4932.
19. Lauret J. Einstein solvmanifolds and nilsolitons, New development in Lie theory and geometry // Contemp. Math. 2009. Vol. 491. P. 1–35.
20. Alexeevskii D.V., Kimel'fel'd B.N. Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature // Funktsional. Anal. i Pril. 1975. Vol. 9, № 2. P. 5–11.
21. Petersen P., Wylie W. On gradient Ricci solitons with symmetry // Proc. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 137, № 6. P. 2085–2092.
22. Ivey T. Ricci solitons on compact three-manifolds // Differential Geometry and Applications. 1993. Vol. 3, № 4. P. 301–307.
23. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия АлтГУ. 2015. Т. 85, № 1/2. С. 122–129.
24. Calvaruso G., Fino A. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2015. Vol. 12, № 5.
25. Lauret J. Ricci soliton homogeneous nilmanifolds // Math. Ann. 2001. Vol. 319, № 4. P. 715–733.
26. Onda K. Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case // Acta Mathematica Hungarica. 2014. Vol. 144, № 1. P. 247–265.
27. Chaichi M., Keshavarzi Y. Conformally Flat Pseudo-riemannian Homogeneous Ricci Solitons 4-spaces // Indian Journal of Science and Technology. 2015. Vol. 8, № 12. P. 1–11.
28. Catino G., Mantegazza C. The Evolution of the Weyl Tensor under the Ricci Flow // Ann. Inst. Fourier. 2011. Vol. 61, № 4. P. 1407–1435.
29. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Известия АлтГУ. 2016. Т. 89, № 1. С. 123–128.
30. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля // Доклады академии наук. 2017. Т. 472, № 5. С. 506–508.
31. Клепиков П.Н. Конформно плоские алгебраические солитоны Риччи на группах Ли // Матем. заметки. 2018. Т. 104, № 1. С. 62–73.
32. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О солитонах Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях // Известия АлтГУ. 2017. Т. 93, № 1. С. 106–109.
33. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О солитонах Риччи на 2-симметрических четырехмерных лоренцевых многообразиях // Известия АлтГУ. 2017. Т. 96, № 4. С. 126–130.
34. Ernst I.V., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Ricci Solitons on Lorentzian Walker Manifolds of Low Dimension // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, № 2. P. 191–194.
35. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О солитонах Риччи на 3-симметрических лоренцевых многообразиях // Известия АлтГУ. 2018. Т. 99, № 1. С. 119–122.

36. Алексеевский Д.В., Кимельфельд Б.Н. Классификация однородных конформно-плоских римановых многообразий // *Мат. заметки*. 1978. Т. 24, № 1. С. 103–110.
37. Takagi H. Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries // *Tohoku Math. J.* 1975. Vol. 27, № 1. P. 103–110.
38. Kuiper N.H. On conformally flat spaces in the large // *Ann. of Math.* 1949. Vol. 50. P. 916–924.
39. Honda K., Tsukada K. Conformally Flat Homogeneous Lorentzian Manifolds // *Recent Trends in Lorentzian Geometry*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2013. Vol. 26. P. 295–314.
40. Куркина М.В., Родионов Е.Д., Славский В.В. Конформно-выпуклые функции и конформно-плоские метрики неотрицательной кривизны // *ДАН*. 2015. Т. 462, № 2. С. 141–143.
41. Nikonov Y.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // *Journal of Mathematical Sciences*. 2007. Vol. 146, № 6. P. 6313–6390.
42. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // *ДАН*. 2013. Т. 450, № 2. С. 140–142.
43. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Polar Transform of Conformally Flat Metrics // *Siberian Advances in Mathematics*. 2018. Vol. 28, № 2. P. 101–114.
44. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Chibrikova L.N. Left-invariant Lorentz metrics on three-dimensional Lie groups with a Schouten-Weyl tensor of squared length zero // *Doklady Mathematics*. 2005. Vol. 71. P. 459–461.
45. Khromova O.P., Klepikov P.N., Klepikova S.V., Rodionov E.D. About Schouten-Weyl tensor on 3-dimensional Lorentzian Lie groups // *arXiv:1708.06614*. 2017.
URL: <https://arxiv.org/pdf/1708.06614.pdf>
46. Milnor J. Curvatures of left invariant metric on Lie group // *Advances in mathematics*. 1976. Vol. 21. P. 293–329.
47. Komrakov B.B. Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // *Lobachevskii J. Math.* 2001. Vol. 8. P. 33–165.
48. Клепикова С.В., Хромова О.П. Локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4 с изотропным тензором Вейля // *Известия АлтГУ*. 2018. Т. 99, № 1. С. 99–102.

References

1. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein. *Geom. Dedicata*, 1978, vol. 7, pp. 259–280.
2. Besse A. *Einstein Manifolds*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
3. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons. *Advanced Lectures in Mathematics*, 2010, vol. 11, pp. 1–38.
4. Cerbo F.L. Generic properties of homogeneous Ricci solitons. *Adv. Geom*, 2014, vol. 14, no. 2, pp. 225–237.
5. Balaschenko V.V., Nikonov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. *Homogeneous manifolds: theory and applications*. Khanty-Mansiisk: Poligraphist, 2008.
6. Calvaruso G. Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds. *Geom. Dedicata*, 2007, vol. 127, pp. 99–119.
7. Gladunova O.P., Slavskii V.V. Left-invariant riemannian metrics on four-dimensional unimodular lie groups with zero-divergence weyl tensor. *Doklady Akademii Nauk*, 2010, vol. 431, no. 6, pp. 736–768.
8. Voronov D.S., Rodionov E.D. Left-invariant riemannian metrics on four-dimensional nonunimodular lie groups with zero-divergence weyl tensor. *Doklady Akademii Nauk*, 2010, vol. 432, no. 3, pp. 301–303.
9. Gladunova O.P., Slavskii V.V. About Harmonic Weyl Tensor of Left-Invariant Riemannian Metrics on Four-Dimensional Unimodular Lie Groups. *Matematicheskie Trudi*, 2011, vol. 14, no. 1, pp. 50–69.
10. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Khromova O.P. About Harmonic Weyl Tensor of Left-Invariant Riemannian Metrics on Four-Dimensional Nonunimodular Decomposable Lie Groups. *Izvestiya of ASU*, 2014, no. 1/1(81), pp. 122–126.
11. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Khromova O.P. Harmonicity of Weyl Tensor of Left-Invariant Riemannian Metrics on Four-Dimensional Nonunimodular Nondecomposable Lie Groups. *Izvestiya of ASU*, 2014, no. 1/2(81), pp. 62–73.
12. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds. *Tohoku Math. J.*, 2014, vol. 66, pp. 31–54.

13. Calvaruso G., Zaeim A. Four-dimensional Lorentzian Lie groups. *Diff. Geom. and its Appl.*, 2013, vol. 31, pp. 496–509.
14. Calvaruso G., Zaeim A. Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groups. *Journal of Lie Theory*, 2015, vol. 25, pp. 1023–1044.
15. Zaeim A., Haji-Badali A. Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four. *Mediterr. J. Math.*, 2016, vol. 13(5), pp. 3455–3468.
16. Klepikov P.N. Left-invariant pseudo-Riemannian metrics on four-dimensional Lie groups with zero Schouten–Weyl tensor. *Izvestiya VUZov. Matematika*, 2017, no. 8, pp. 92–97.
17. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces. *Contemporary Mathematics*, 1988, vol. 71, pp. 237–261.
18. Arroyo R.M., Lafuente R. Homogeneous Ricci solitons in low dimensions. *Int Math Res Notices*, 2015, vol. 2015, no. 13, pp. 4901–4932.
19. Lauret J. Einstein solvmanifolds and nilsolitons, New development in Lie theory and geometry. *Contemp. Math.*, 2009, vol. 491, pp. 1–35.
20. Alexeevskii D.V., Kimel'fel'd B.N. Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature. *Funktional. Anal. i Pril.*, 1975, vol. 9, no. 2, pp. 5–11.
21. Petersen P., Wylie W. On gradient Ricci solitons with symmetry. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2009, vol. 137, no. 6, pp. 2085–2092.
22. Ivey T. Ricci solitons on compact three-manifolds. *Differential Geometry and Applications*, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 301–307.
23. Klepikov P.N., Oskorbin D.N. Homogeneous Invariant Ricci Solitons on Four-dimensional Lie Groups. *Izvestiya of ASU*, 2015, vol. 85, no. 1/2, pp. 122–129.
24. Calvaruso G., Fino A. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2015, no. 12.
25. Lauret J. Ricci soliton homogeneous nilmanifolds. *Math. Ann.*, 2001, vol. 319, no. 4, pp. 715–733.
26. Onda K. Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case. *Acta Mathematica Hungarica*, 2014, vol. 144, no. 1, pp. 247–265.
27. Chaichi M., Keshavarzi Y. Conformally Flat Pseudo-riemannian Homogeneous Ricci Solitons 4-spaces. *Indian Journal of Science and Technology*, 2015, vol. 8, no. 12, pp. 1–11.
28. Catino G., Mantegazza C. The Evolution of the Weyl Tensor under the Ricci Flow. *Ann. Inst. Fourier*, 2011, vol. 61, no. 4, pp. 1407–1435.
29. Klepikov P.N., Oskorbin D.N. Conformally Flat Ricci Solitons on Lie Groups with Left-invariant (pseudo)Riemannian Metrics. *Izvestiya of ASU*, 2016, vol. 89, no. 1, pp. 123–128.
30. Klepikov P.N., Rodionov E.D. Algebraic Ricci solitons on metric Lie groups with zero Schouten–Weyl tensor. *Doklady Akademii Nauk*, 2017, vol. 472, no. 5, pp. 506–508.
31. Klepikov P.N. Conformally Flat Algebraic Ricci Solitons on Lie Groups. *Matematicheskie Zametki*, 2018, vol. 104, no. 1, pp. 62–73.
32. Oskorbin D.N., Rodionov E.D., Ernst I.V. Ricci Solitons on 2-symmetric Lorentzian Manifolds. *Izvestiya of ASU*, 2017, vol. 93, no. 1, pp. 106–109.
33. Oskorbin D.N., Rodionov E.D., Ernst I.V. Ricci Solitons on 2-Symmetric Four-Dimensional Lorentzian Manifolds. *Izvestiya of ASU*, 2017, vol. 96, no. 4, pp. 126–130.
34. Ernst I.V., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Ricci Solitons on Lorentzian Walker Manifolds of Low Dimension. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, vol. 39, no. 2, pp. 191–194.
35. Oskorbin D.N., Rodionov E.D., Ernst I.V. Ricci Solitons on 3-Symmetric Lorentzian Manifolds. *Izvestiya of ASU*, 2018, vol. 99, no. 1, pp. 119–122.
36. Alexeevskii D.V., Kimel'fel'd B.N. Classification of homogeneous conformally flat Riemannian manifolds. *Matematicheskie Zametki*, 1978, vol. 24, no. 1, pp. 103–110.
37. Takagi H. Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries. *Tohoku Math. J.*, 1975, vol. 27, no. 1, pp. 103–110.
38. Kuiper N.H. On conformally flat spaces in the large. *Ann. of Math.*, 1949, vol. 50, pp. 916–924.
39. Honda K., Tsukada K. Conformally Flat Homogeneous Lorentzian Manifolds. *Recent Trends in Lorentzian Geometry. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 2013, vol. 26, pp. 295–314.

40. Kurkina M.V., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Conformally Convex Functions and Conformally Flat Metrics of Nonnegative Curvature. *Doklady Akademii Nauk*, 2015, vol. 462, no. 2, pp. 141–143.
41. Nikonov Y.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds. *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 146, no. 6, pp. 6313–6390.
42. Gladunova O.P., Rodionov E.D., Slavskii V.V. On the spectrum of the curvature operator of conformally flat Riemannian manifolds. *Doklady Akademii Nauk*, 2013, vol. 450, no. 2, pp. 140–142.
43. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Polar Transform of Conformally Flat Metrics. *Siberian Advances in Mathematics*, 2018, vol. 28, no. 2, pp. 101–114.
44. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Chibrikova L.N. Left-invariant Lorentz metrics on three-dimensional Lie groups with a Schouten-Weyl tensor of squared length zero. *Doklady Mathematics*, 2005, vol. 71, pp. 459–461.
45. Khromova O.P., Klepikov P.N., Klepikova S.V., Rodionov E.D. About Schouten-Weyl tensor on 3-dimensional Lorentzian Lie groups. *arXiv:1708.06614*, 2017.
<https://arxiv.org/pdf/1708.06614.pdf>
46. Milnor J. Curvatures of left invariant metric on Lie group. *Advances in mathematics*, 1976, vol. 21, pp. 293–329.
47. Komrakov B.B. Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces. *Lobachevskii J. Math*, 2001, vol. 8, pp. 33–165.
48. Klepikova S.V., Khromova O.P. Locally Homogeneous Pseudo-Riemannian 4-Manifolds with Isotropic Weyl Tensor. *Izvestiya of ASU*, 2018, vol. 99, no. 1, pp. 99–102.

Авторы

Клепиков Павел Николаевич, аспирант, кафедра математического анализа, факультет математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, г. Барнаул, 656049, Россия.

E-mail: klepikov.math@gmail.com

Оскорбин Дмитрий Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, факультет математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, г. Барнаул, 656049, Россия.

E-mail: oskorbin@yandex.ru

Родионов Евгений Дмитриевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического анализа, факультет математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, г. Барнаул, 656049, Россия.

E-mail: edr2002@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Клепиков П. Н., Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д. О почти эйнштейновых локально однородных (псевдо)римановых многообразиях // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2019. № 4. С. 48–65.

Authors

Klepikov Pavel Nikolaevich, postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, pr. Lenina, 61, Barnaul, 656049, Russia.

E-mail: klepikov.math@gmail.com

Oskorbin Dmitrii Nokolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Altai State

University, pr. Lenina, 61, Barnaul, 656049, Russia.

E-mail: oskorbin@yandex.ru

Rodionov Evgenii Dmitrievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, pr. Lenina, 61, Barnaul, 656049, Russia.

E-mail: edr2002@mail.ru

Please cite this article in English as:

Klepikov P. N., Oskorbin D. N., Rodionov E. D. On Almost Einstein Locally Homogeneous (pseudo)Riemannian Manifolds. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 4, pp. 48–65.